6.7 Fiche d'exercices sur l'intersection de plans avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Déterminer la ou les solutions de chaque système de plans. S'il n'y a pas de solution cohérente, donner une preuve ou une explication du pourquoi.

a) $\pi_1 : 3x - 2y + z = 4$

$\pi_2 : 6x - 4y + 3z = 7$

Les normales ne sont pas parallèles; elles se croisent selon une droite.

$2\times① : \quad 6x - 4y + 2z = 8$

$② : \quad 6x - 4y + 3z = 7$

$-z = 1, \quad z = -1$

Poser $x = t$:

$3t - 2y + (-1) = 4$

$3t - 1 - 4 = 2y$

$3t - 5 = 2y$

$y = \frac{3}{2}t - \frac{5}{2}$

$\ell : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{2}t - \frac{5}{2} \\ z = -1 \end{cases}$

$[x, y, z] = \left[0, -\frac{5}{2}, -1\right] + t\left[1, \frac{3}{2}, 0\right]$

b) $\pi_1 : 2x - 8y - 6z - 2 = 0$

$\pi_2 : -x + 4y + 3z - 5 = 0$

Les normales SONT parallèles; vérifier si confondus ou distincts.

$① : \quad 2x - 8y - 6z - 2 = 0$

$2\times② : \quad -2x + 8y + 6z - 10 = 0$

$-12 = 0$

Aucune solution. Parallèles et distincts.

c) $\pi_1 : x - 2y + 2.5z - 1 = 0$

$\pi_2 : 3x - 6y + 7.5z - 3 = 0$

Les normales sont parallèles; vérifier si distincts ou confondus

$3\times① : \quad 3x - 6y + 7.5z - 3 = 0$

$② : \quad 3x - 6y + 7.5z - 3 = 0$

$0 = 0$

Parallèles et confondus. Infinité de solutions.

d) $\pi_1 : x + y + 2z = 5$

$\pi_2 : 4x - 3y + z = -8$

$\pi_3 : -5x - 2y + 3z = 7$

Aucune normale n'est parallèle.

$① : \quad x + y + 2z = 5$

$2\times② : \quad 8x - 6y + 2z = -16$

$-7x + 7y = 21$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$3\times①:\quad 3x+3y+6z=15$

$2\times③:\quad -10x-4y+6z=14$

$13x+7y=1$

$(-7x+7y=21)-(13x+7y=1):$

$-20x=20,\quad x=-1$

$13(-1)+7y=1$

$7y=14,\quad y=2$

$x+y+2z=5:\quad -1+2+2z=5$

$2z=4,\quad z=2$

Les trois plans se croisent au point $(-1,\ 2,\ 2)$.

e) $\pi_1: x+y+z=-3$

$\pi_2: 2x+2y-3z=4$

$\pi_3: 3x+3y-2z=1$

Aucune normale n'est parallèle.

$2\times①:\quad 2x+2y+2z=-6$

$②:\quad 2x+2y-3z=4$

$5z=-10,\quad z=-2$

$3\times①:\quad 3x+3y+3z=-9$

$③:\quad 3x+3y-2z=1$

$5z=-10,\quad z=-2$

Poser $x=t$:

$t+y+(-2)=-3$

$y=-1-t$

$\ell: \begin{cases} x=t \\ y=-1-t \\ z=-2 \end{cases}$

$[x,\ y,\ z]=[0,\ -1,\ -2]+t[1,\ -1,\ 0]$

f) $\pi_1: -x+y+3z=2$

$\pi_2: 2x-2y-6z=-4$

$\pi_3: -3x+3y+9z=6$

$-2\pi_1=\pi_2,\ 3\pi_1=\pi_3$

Trois plans confondus. Infinité de solutions.

g) $\pi_1: x-4y-13z=4$

$\pi_2: x-2y-3z=2$

$\pi_3: -3x+5y+4z=2$

Aucune normale parallèle.

$①:\quad x-4y-13z=4$

$②:\quad x-2y-3z=2$

$-2y-10z=2$

$3\times①:\quad 3x-12y-39z=12$

$③:\quad -3x+5y+4z=2$

$-7y-35z=14$

$7\times(①-②):\quad -14y-70z=14$

$2\times(3①+③):\quad -14y-70z=28$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$0 = -14$

Aucune solution. C'est un système incohérent; les plans se croisent deux à deux.

h) $\pi_1 : 3x - 2y + 5z = 1$

$\pi_2 : 5x + y - 3z = -4$

$\pi_3 : x - 5y + 13z = 6$

Aucune normale parallèle.

$5\times① : \quad 15x - 10y + 25z = 5$

$3\times② : \quad 15x + 3y - 9z = -12$

$-13y + 34z = 17$

$① : \quad 3x - 2y + 5z = 1$

$3\times③ : \quad 3x - 15y + 39z = 18$

$13y - 34z = -17$

Les deux équations obtenues sont identiques (multipliées par -1), donc les plans se croisent selon une droite. Poser $y = t$:

$-13t + 34z = 17$

$z = \frac{17}{34} + \frac{13}{34}t$

$③ : \quad x - 5t + 13\left(\frac{17}{34} + \frac{13}{34}t\right) = 6$

$x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{34}t$

$$\ell : \begin{cases} x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{34}t \\ y = t \\ z = \frac{17}{34} + \frac{13}{34}t \end{cases}$$

$$[x,\ y,\ z] = \left[-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{17}{34}\right] + t\left[\frac{1}{34},\ 1,\ \frac{13}{34}\right]$$

i) $\pi_1 : -x + y + 3z = 2$

$\pi_2 : -x + y + 3z = 4$

$\pi_3 : x - 3y + 5z = 6$

$\vec{n_1} = \vec{n_2}$ mais $\pi_1 \neq k\pi_2$; ils sont parallèles et distincts.

Système incohérent; deux plans parallèles et distincts croisés par un troisième plan.

j) $\pi_1 : x + 4y + 3z = 5$

$\pi_2 : x + 3y + 2z + 4 = 0$

$\pi_3 : x + y - z = -1$

Aucune normale parallèle.

$① : \quad x + 4y + 3z = 5$

$② : \quad x + 3y + 2z = -4$

$y + z = 9$

$① : \quad x + 4y + 3z = 5$

$③ : \quad x + y - z = -1$

$3y + 4z = 6$

$3\times(y + z = 9) : \quad 3y + 3z = 27$

$3y + 4z = 6$

$-z = 21, \quad z = -21$

$y + (-21) = 9$

$y = 30$

$x + 4(30) + 3(-21) = 5$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$x = -52$

Ils se croisent au point $(-52, 30, -21)$.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.