6.6 Fiche d'exercices sur l'intersection de droites et de plans avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

1) Dans chaque cas, déterminer si la droite et le plan sont parallèles. Si oui, déterminer s'ils sont distincts ou confondus.

a) $\ell_1 : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$ $\pi_1 : 3x + 2y + z - 7 = 0$

$\vec{m} = [2, -1, -4]$, $\vec{n} = [3, 2, 1]$

$\vec{m} \cdot \vec{n} = 2(3) + (-1)(2) + (-4)(1)$

$\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$

Donc $\vec{m}$ et $\vec{n}$ sont perpendiculaires, donc ℓ_1 est parallèle au plan.

Vérifier si $(4, 0, -1)$ se trouve sur le plan :

$MG = 3(4) + 2(0) + (-1) - 7$

$MD = 0$

$MG = 4$

$MG \neq MD$, donc ℓ_1 est parallèle et distincte du plan.

b) $\ell_2 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases}$ $\pi_2 : x - y + 2z = 5$

$\vec{m} = [1, 2, 3]$, $\vec{n} = [1, -1, 2]$

$\vec{m} \cdot \vec{n} = 1(1) + 2(-1) + 3(2)$

$\vec{m} \cdot \vec{n} = 5$

$\vec{m}$ et $\vec{n}$ ne sont pas perpendiculaires, donc ℓ_2 n'est PAS parallèle à π_2.

2) Dans chaque cas, déterminer si le plan et la droite se croisent. Si oui, donner la solution.

a) $[x, y, z] = [1, 2, 5] + t[1, -1, 2]$ $2x + 6y - z = 5$

$\ell : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 5 + 2t \end{cases}$

$2(1 + t) + 6(2 - t) - (5 + 2t) = 5$

$2 + 2t + 12 - 6t - 5 - 2t = 5$

$-6t + 9 = 5$

$t = \frac{2}{3}$

$x = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$

$y = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

$z = 5 + 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{19}{3}$

Point d'intersection : $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{19}{3}\right)$

b) $[x, y, z] = [6, 11, 1] + t[1, 5, 2]$ $x + 3y + 2z - 1 = 0$

$\ell : \begin{cases} x = 6 + t \\ y = 11 + 5t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$

$(6 + t) + 3(11 + 5t) + 2(1 + 2t) - 1 = 0$

$6 + t + 33 + 15t + 2 + 4t - 1 = 0$

$20t + 40 = 0$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$t = -2$

$x = 6 + (-2) = 4$

$y = 11 + 5(-2) = 1$

$z = 1 + 2(-2) = -3$

Point d'intersection : $(4, 1, -3)$

c) $[x, y, z] = [9, 8, 3] + t[2, 1, 5] \qquad z = 0$

$\ell : \begin{cases} x = 9 + 2t \\ y = 8 + t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$

$3 + 5t = 0$

$t = -\frac{3}{5}$

$x = 9 + 2\left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{39}{5}$

$y = 8 + \left(-\frac{3}{5}\right) = \frac{37}{5}$

Point d'intersection : $\left(\frac{39}{5}, \frac{37}{5}, 0\right)$

d) $[x, y, z] = [4, 2, 6] + t[1, -2, 3] \qquad 2x + 5y - z - 34 = 0$

$\ell : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$

$2(4 + t) + 5(2 - 2t) - (6 + 3t) - 34 = 0$

$8 + 2t + 10 - 10t - 6 - 3t - 34 = 0$

$-11t = 22$

$t = -2$

$x = 4 + (-2) = 2$

$y = 2 - 2(-2) = 6$

$z = 6 + 3(-2) = 0$

Point d'intersection : $(2, 6, 0)$

e) $[x, y, z] = [3, 2, -1] + t[-2, 1, 3] \qquad x + 2y - 3z = 10$

$\ell : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 3t \end{cases}$

$(3 - 2t) + 2(2 + t) - 3(-1 + 3t) = 10$

$3 - 2t + 4 + 2t + 3 - 9t = 10$

$-9t = 0$

$t = 0$

Point d'intersection : $(3, 2, -1)$

f) $[x, y, z] = [4, 2, 6] + t[1, -2, 3] \qquad -4x - 5y + 6z = 34$

$\ell : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 6 + 3t \end{cases}$

$-4(4 + t) - 5(2 - 2t) + 6(6 + 3t) = 34$

$-16 - 4t - 10 + 10t + 36 + 18t = 34$

$24t = 24$

$t = 1$

$x = 4 + 1 = 5$

$y = 2 - 2(1) = 0$

$z = 6 + 3(1) = 9$

Point d'intersection : $(5, 0, 9)$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

3) Déterminer si chacune des droites suivantes croise le plan : $\pi : [x, y, z] = [4, -15, -8] + s[1, -3, 1] + t[2, 3, 1]$. Si oui, combien y a-t-il d'intersections?

$\vec{n} = \overrightarrow{m_1} \times \overrightarrow{m_2} = [-3(1) - 1(3), 1(2) - 1(1), 1(3) - (-3)(2)]$

$\vec{n} = [-6, 1, 9]$

$\pi : -6x + y + 9z + D = 0$

$-6(4) + (-15) + 9(-8) + D = 0$

$D = 111$

$\pi : -6x + y + 9z + 111 = 0$

a) $[x, y, z] = [5, -9, 3] + k[1, -12, 2]$

$\overrightarrow{m_3} = [1, -12, 2]$

$\overrightarrow{m_3} \cdot \vec{n} = 1(-6) + (-12)(1) + 2(9)$

$\overrightarrow{m_3} \cdot \vec{n} = 0$, donc la droite est parallèle au plan.

Vérifier si $(5, -9, 3)$ *se trouve sur le plan :*

$-6(5) + (-9) + 9(3) + 111$

$= 99 \neq 0$, donc le point $P(5, -9, 3)$ ne se trouve pas sur le plan.

La droite et le plan sont parallèles et distincts. Aucune intersection.

b) $[x, y, z] = [-2, 9, -21] + k[2, -5, 4]$

$\overrightarrow{m_4} = [2, -5, 4]$

$\overrightarrow{m_4} \cdot \vec{n} = 2(-6) + (-5)(1) + 4(9)$

$\overrightarrow{m_4} \cdot \vec{n} = 19$

La droite n'est pas parallèle au plan. Il y a 1 point d'intersection.

c) $[x, y, z] = [3, -2, 1] + k[1, 4, -2]$

$\overrightarrow{m_5} = [1, 4, -2]$

$\overrightarrow{m_5} \cdot \vec{n} = 1(-6) + 4(1) + (-2)(9)$

$\overrightarrow{m_5} \cdot \vec{n} = -20$

La droite et le plan ne sont pas parallèles. Il y a 1 point d'intersection.

d) $[x, y, z] = [4, -24, -7] + k[-2, -3, -1]$

$\overrightarrow{m_6} = [-2, -3, -1]$

$\overrightarrow{m_6} \cdot \vec{n} = -2(-6) + (-3)(1) + (-1)(9)$

$\overrightarrow{m_6} \cdot \vec{n} = 0$, donc la droite et le plan sont parallèles.

Vérifier si $(4, -24, -7)$ *se trouve sur le plan :*

$-6(4) + (-24) + 9(-7) + 111$

$= 0$, donc le point se trouve sur le plan.

La droite se trouve sur le plan. Infinité de solutions.

e) $[x, y, z] = [2, -3, 0] + k[-1, 3, -1]$

$\overrightarrow{m_7} = [-1, 3, -1]$

$\overrightarrow{m_7} \cdot \vec{n} = -6(-1) + 1(3) + 9(-1)$

$\overrightarrow{m_7} \cdot \vec{n} = 0$, donc la droite et le plan sont parallèles.

Vérifier si $(2, -3, 0)$ *se trouve sur le plan :*

$-6(2) + (-3) + 9(0) + 111$

$= 96 \neq 0$, donc le point ne se trouve pas sur le plan.

La droite et le plan sont parallèles et distincts. Aucune intersection.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

f) $[x,\ y,\ z] = [9,\ 4,\ 1] + k[-2,\ 2,\ 4]$

$\overrightarrow{m_8} = [-2,\ 2,\ 4]$

$\overrightarrow{m_8} \cdot \vec{n} = -6(-2) + 1(2) + 9(4)$

$\overrightarrow{m_8} \cdot \vec{n} = 50$

La droite et le plan ne sont pas parallèles. Il y a 1 point d'intersection.

4) Trouver la distance entre chaque point et le plan donné.

a) $P(1,\ 1,\ -1)$, $\quad x + y - z - 3 = 0$

Point Q sur le plan :

$0 + 0 - z - 3 = 0$

$z = -3$, donc $Q(0,\ 0,\ -3)$

$\overrightarrow{PQ} = [-1,\ -1,\ -2]$, $\vec{n} = [1,\ 1,\ -1]$

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|} = \frac{|-1(1) + (-1)(1) + (-2)(-1)|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (-1)^2}}$$

$d = \frac{0}{\sqrt{3}} = 0$, donc le point se trouve sur le plan.

b) $P(7,\ -3,\ 2)$, $\quad 2x - 3z - 1 = 0$

Point Q sur le plan :

$2(2) - 3z - 1 = 0$

$z = 1$, donc $Q(2,\ 5,\ 1)$

$\overrightarrow{PQ} = [-5,\ 8,\ -1]$, $\vec{n} = [2,\ 0,\ -3]$

$$d = \frac{|-5(2) + 8(0) + (-1)(-3)|}{\sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (-3)^2}}$$

$$d = \frac{7}{\sqrt{13}}$$

$d \cong 1.94$

5) Trouver la distance entre les plans $\pi_1 : 2x + 2y - z - 3 = 0$ et $\pi_2 : 4x + 4y - 2z + 9 = 0$

Point sur π_1 : $2(0) + 2(0) - z - 3 = 0$

$z = -3$, donc $A(0,\ 0,\ -3)$

Point sur π_2 : $4(0) + 4(0) - 2z + 9 = 0$

$z = 4.5$, donc $B(0,\ 0,\ 4.5)$

$\overrightarrow{AB} = [0,\ 0,\ 7.5]$, $\vec{n} = [2,\ 2,\ -1]$

$$d = \frac{|0(2) + 0(2) + 7.5(-1)|}{\sqrt{(2)^2 + (2)^2 + (-1)^2}}$$

$d = \frac{7.5}{3} = 2.5$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.