6.5 Fiche d'exercices sur les intersections de droites en deux dimensions et en trois dimensions avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

1) Résoudre chaque système linéaire en deux dimensions.

a) $3x-5y=-9,\ 4x+5y=23$

Additionner : $7x=14 \rightarrow x=2$

$3(2)-5y=-9 \rightarrow -5y=-15 \rightarrow y=3$

La solution est $(2,\ 3)$.

b) $\ell_1 : [x,\ y]=[5,\ 4]+s[-3,\ 1],\ \ell_2 : [x,\ y]=[2,\ 2]+t[2,\ -1]$

$\ell_1 : \begin{cases} x=5-3s \\ y=4+s \end{cases}$ $\ell_2 : \begin{cases} x=2+2t \\ y=2-t \end{cases}$

$5-3s=2+2t \rightarrow 3=2t+3s$

$4+s=2-t \rightarrow 2=-t-s$

$2\times(2=-t-s) \rightarrow 4=-2t-2s$

Additionner à $3=2t+3s$: $\rightarrow 7=s$

$3=2t+3(7) \rightarrow t=-9$

$\ell_1 : x=5-3(7)=-16,\ y=4+7=11$

Vérifier dans ℓ_2 : $x=2+2(-9)=-16,\ y=2-(-9)=11$

La solution est $(-16,\ 11)$.

2) Déterminer si les droites parallèles de chaque paire sont distinctes ou confondues.

a) $\ell_1 : [x,\ y,\ z]=[5,\ -2,\ -8]+s[-3,\ 2,\ 5]$

$\ell_2 : [x,\ y,\ z]=[-4,\ 0,\ 2]+t[-3,\ 2,\ 5]$

Vérifier si le point $(-4,\ 0,\ 2)$ se trouve sur ℓ_1 :

$\ell_1 : \begin{cases} x=5-3s \\ y=-2+2s \\ z=-8+5s \end{cases}$

$-4=5-3s \rightarrow s=3$

$0=-2+2s \rightarrow s=1$

$2=-8+5s \rightarrow s=2$

Puisque les valeurs de s ne sont pas égales, le point ne se trouve pas sur ℓ_1. Donc, les droites sont parallèles et distinctes.

b) $\ell_1 : [x,\ y,\ z]=[-3,\ 0,\ -6]+s[-3,\ 0,\ -6]$

$\ell_2 : [x,\ y,\ z]=[9,\ 1,\ 18]+t[9,\ 0,\ 18]$

Vérifier si le point $(-3,\ 0,\ -6)$ se trouve sur ℓ_2 :

$\ell_2 : \begin{cases} x=9+9t \\ y=1 \\ z=18+18t \end{cases}$

$-3=9+9t \rightarrow t=-\frac{4}{3}$

$0=1 \rightarrow$ Impossible

Puisque $y=1$ ne peut jamais être égal à 0, le point ne se trouve pas sur ℓ_2. Donc, les droites sont parallèles et distinctes.

3) Le triangle ABC est formé par les intersections des trois droites représentées par ces équations. Trouver la longueur de chaque côté du $\triangle ABC$.

$\ell_1 : [x,\ y]=[1,\ -3]+t[0,\ 1]$ $\ell_2 : [x,\ y]=[2,\ 4]+s[-1,\ 6]$ $\ell_3 : [x,\ y]=[2,\ 3]+r[1,\ 7]$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$\ell_1 : \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + t \end{cases}$ $\ell_2 : \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 4 + 6s \end{cases}$ $\ell_3 : \begin{cases} x = 2 + r \\ y = 3 + 7r \end{cases}$

Intersection de ℓ_1 et ℓ_2 :

$1 = 2 - s \rightarrow s = 1$

$x = 2 - 1 = 1, \ y = 4 + 6(1) = 10$

$P_1 = (1, \ 10)$

Intersection de ℓ_2 et ℓ_3 :

$2 - s = 2 + r \rightarrow 0 = s + r$

$4 + 6s = 3 + 7r \rightarrow 1 = -6s + 7r$

$6 \times (0 = s + r) \rightarrow 0 = 6s + 6r$

Additionner : $1 = 13r \rightarrow r = \frac{1}{13}$

$x = 2 + \frac{1}{13} = \frac{27}{13}, \ y = 3 + 7\left(\frac{1}{13}\right) = \frac{46}{13}$

$P_2 = \left(\frac{27}{13}, \ \frac{46}{13}\right)$

Intersection de ℓ_1 et ℓ_3 :

$1 = 2 + r \rightarrow r = -1$

$x = 2 + (-1) = 1, \ y = 3 + 7(-1) = -4$

$P_3 = (1, \ -4)$

$\overrightarrow{P_1P_2} = \left[\frac{14}{13}, \ -\frac{84}{13}\right]$

$\overrightarrow{P_1P_3} = [0, \ -14]$

$\overrightarrow{P_2P_3} = \left[-\frac{14}{13}, \ -\frac{98}{13}\right]$

$|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{7252}/13 = \frac{14\sqrt{37}}{13}$

$|\overrightarrow{P_1P_2}| \cong 6.55$

$|\overrightarrow{P_1P_3}| = \sqrt{196} = 14$

$|\overrightarrow{P_1P_3}| = 14$

$|\overrightarrow{P_2P_3}| = \sqrt{9800}/13 = \frac{70\sqrt{2}}{13}$

$|\overrightarrow{P_2P_3}| \cong 7.61$

4) Le parallélogramme ABCD a pour sommets $A(-1, \ -4)$, $B(1, \ -3)$, $C(6, \ -6)$, et $D(4, \ -7)$. Trouver les équations vectorielles de ses diagonales et le point d'intersection des diagonales.

$\overrightarrow{AC} = [6 - (-1), \ -6 - (-4)] = [7, \ -2]$

$\overrightarrow{BD} = [4 - 1, \ -7 - (-3)] = [3, \ -4]$

$\ell_1 : [x, \ y] = [-1, \ -4] + t[7, \ -2]$

$\ell_2 : [x, \ y] = [1, \ -3] + s[3, \ -4]$

$\ell_1 : \begin{cases} x = -1 + 7t \\ y = -4 - 2t \end{cases}$ $\ell_2 : \begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = -3 - 4s \end{cases}$

$-1 + 7t = 1 + 3s \rightarrow -2 = -7t + 3s$

$-4 - 2t = -3 - 4s \rightarrow -1 = 2t - 4s$

$4 \times (-2 = -7t + 3s) \rightarrow -8 = -28t + 12s$

$3 \times (-1 = 2t - 4s) \rightarrow -3 = 6t - 12s$

Additionner : $-11 = -22t \rightarrow t = \frac{1}{2}$

$x = -1 + 7\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$

$y = -4 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = -5$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Les diagonales se croisent au point $(2.5,\ -5)$.

5) Déterminer si les droites de chaque paire se croisent. Si oui, trouver les coordonnées du point d'intersection.

a) $\ell_1 : [x,\ y,\ z] = [9,\ -1,\ 1] + s[-3,\ 4,\ 1]$

$\ell_2 : [x,\ y,\ z] = [-3,\ 11,\ 5] + t[-3,\ 4,\ 1]$

Les vecteurs directeurs sont identiques, donc les droites sont parallèles. Vérifier si le point $(-3,\ 11,\ 5)$ se trouve sur ℓ_1 :

$-3 = 9 - 3s \rightarrow s = 4$

$11 = -1 + 4s \rightarrow s = 3$

Puisque les valeurs de s ne sont pas égales, le point ne se trouve pas sur ℓ_1. Donc, il n'y a aucune solution; les droites sont parallèles et distinctes.

b) $\ell_1 : [x,\ y,\ z] = [1,\ 4,\ 5] + s[3,\ 0,\ -2]$

$\ell_2 : [x,\ y,\ z] = [9,\ 4,\ -3] + t[3,\ 0,\ -2]$

Les vecteurs directeurs sont identiques, donc les droites sont parallèles. Vérifier si le point $(1,\ 4,\ 5)$ se trouve sur ℓ_2 :

$1 = 9 + 3t \rightarrow t = -\frac{8}{3}$

$5 = -3 - 2t \rightarrow t = -4$

Puisque les valeurs de t ne sont pas égales, le point ne se trouve pas sur ℓ_2. Donc, il n'y a aucune solution; les droites sont parallèles et distinctes.

c) $\ell_1 : [x,\ y,\ z] = [1,\ 0,\ -3] + t[3,\ 5,\ 4]$

$\ell_2 : [x,\ y,\ z] = [0,\ -9,\ -1] + s[-1,\ 2,\ -3]$

Les vecteurs directeurs ne sont pas des multiples scalaires, donc les droites ne sont pas parallèles.

$\ell_1 : \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 5t \\ z = -3 + 4t \end{cases} \quad \ell_2 : \begin{cases} x = -s \\ y = -9 + 2s \\ z = -1 - 3s \end{cases}$

$1 + 3t = -s \rightarrow 3t + s = -1$

$5t = -9 + 2s \rightarrow 5t - 2s = -9$

$-3 + 4t = -1 - 3s \rightarrow 4t + 3s = 2$

$2\times(3t + s = -1) \rightarrow 6t + 2s = -2$

Additionner à $5t - 2s = -9$: $\rightarrow 11t = -11 \rightarrow t = -1$

$3(-1) + s = -1 \rightarrow s = 2$

Vérifier dans la troisième équation :

$\text{MG} = 4(-1) + 3(2) = 2$

MG = MD = 2. Donc, les droites se croisent. Substituer $t = -1$ dans ℓ_1 :

$x = 1 + 3(-1) = -2,\ y = 5(-1) = -5,\ z = -3 + 4(-1) = -7$

Le point d'intersection est $(-2,\ -5,\ -7)$.

d) $\ell_1 : [x,\ y,\ z] = [4,\ 7,\ -1] + s[-2,\ 1,\ 2]$

$\ell_2 : [x,\ y,\ z] = [1,\ 3,\ -1] + t[4,\ -1,\ 2]$

Les vecteurs directeurs ne sont pas des multiples scalaires, donc les droites ne sont pas parallèles.

$\ell_1 : \begin{cases} x = 4 - 2s \\ y = 7 + s \\ z = -1 + 2s \end{cases} \quad \ell_2 : \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$

$4 - 2s = 1 + 4t \rightarrow 3 = 4t + 2s$

$7 + s = 3 - t \rightarrow 4 = -t - s$

$-1 + 2s = -1 + 2t \rightarrow 0 = 2t - 2s$

$2\times(4 = -t - s) \rightarrow 8 = -2t - 2s$

Additionner à $3 = 4t + 2s$: $\rightarrow 11 = 2t \rightarrow t = \frac{11}{2}$

$4 = -\frac{11}{2} - s \rightarrow s = -\frac{19}{2}$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Vérifier dans la troisième équation :

$\text{MD} = 2\left(\frac{11}{2}\right) - 2\left(-\frac{19}{2}\right) = 11 + 19 = 30$

$\text{MG} = 0 \neq \text{MD} = 30$. Donc, il n'y a aucune solution; les droites sont gauches.

e) $\ell_1 : [x, y, z] = [-2, 0, -3] + t[5, 1, 3]$

$\ell_2 : [x, y, z] = [5, 8, -6] + s[-1, 2, -3]$

Les vecteurs directeurs ne sont pas des multiples scalaires, donc les droites ne sont pas parallèles.

$\ell_1 : \begin{cases} x = -2 + 5t \\ y = t \\ z = -3 + 3t \end{cases} \quad \ell_2 : \begin{cases} x = 5 - s \\ y = 8 + 2s \\ z = -6 - 3s \end{cases}$

$-2 + 5t = 5 - s \rightarrow 5t + s = 7$

$t = 8 + 2s \rightarrow t - 2s = 8$

$-3 + 3t = -6 - 3s \rightarrow 3t + 3s = -3$

$2\times(5t + s = 7) \rightarrow 10t + 2s = 14$

Additionner à $t - 2s = 8$: $\rightarrow 11t = 22 \rightarrow t = 2$

$5(2) + s = 7 \rightarrow s = -3$

Vérifier dans la troisième équation :

$3(2) + 3(-3) = -3$

Elles concordent. Donc, les droites se croisent. Substituer $t = 2$ dans ℓ_1 :

$x = -2 + 5(2) = 8, \quad y = 2, \quad z = -3 + 3(2) = 3$

Le point d'intersection est $(8, 2, 3)$.

6) Déterminer la distance entre les droites gauches de chaque paire.

a) $\ell_1 : [x, y, z] = [4, -3, 2] + s[2, 7, -1]$

$\ell_2 : [x, y, z] = [-2, 5, 4] + t[-4, 0, 3]$

$\overrightarrow{P_1P_2} = [-2 - 4, 5 - (-3), 4 - 2] = [-6, 8, 2]$

$\vec{n} = [2, 7, -1]\times[-4, 0, 3]$

$\vec{n} = [7(3) - (-1)(0), (-1)(-4) - 2(3), 2(0) - 7(-4)]$

$\vec{n} = [21, -2, 28]$

$d = \left|\frac{[-6, 8, 2]\cdot[21, -2, 28]}{\sqrt{(21)^2 + (-2)^2 + (28)^2}}\right|$

$d = \left|\frac{-86}{\sqrt{1229}}\right|$

$d \cong 2.45$ unités

b) $\ell_1 : [x, y, z] = [-1, 6, 1] + s[-2, 4, 3]$

$\ell_2 : [x, y, z] = [5, 1, 9] + t[3, -2, 4]$

$\overrightarrow{P_1P_2} = [5 - (-1), 1 - 6, 9 - 1] = [6, -5, 8]$

$\vec{n} = [-2, 4, 3]\times[3, -2, 4]$

$\vec{n} = [4(4) - 3(-2), 3(3) - (-2)(4), (-2)(-2) - 4(3)]$

$\vec{n} = [22, 17, -8]$

$d = \left|\frac{[6, -5, 8]\cdot[22, 17, -8]}{\sqrt{(22)^2 + (17)^2 + (-8)^2}}\right|$

$d = \left|\frac{-17}{\sqrt{837}}\right|$

$d \cong 0.59$ unités

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.