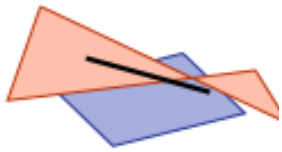
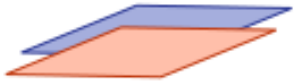
6.7 Leçon sur l'intersection de plans avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Intersection de 2 plans

Droite d'intersection	Infinité de solutions	Aucune solution
		
Si 2 plans distincts se croisent, la solution est l'ensemble des points qui se trouvent sur la droite d'intersection.	Si les plans sont confondus, tout point du plan est une solution	Des plans parallèles et distincts ne se croisent pas

Pour résoudre un système de 2 plans, vérifier si les plans sont parallèles en analysant leurs vecteurs normaux. S'ils sont parallèles, déterminer s'ils sont confondus (infinité de solutions) ou distincts (aucune solution). Si les normales ne sont pas parallèles, cela signifie que les plans ne sont pas parallèles non plus. On peut trouver la droite d'intersection en :

i) Éliminant une variable par la méthode d'élimination

ii) Choisissant 1 des variables restantes pour être le paramètre t

iii) Écrivant les 2 autres variables en fonction du paramètre t aussi pour obtenir l'équation paramétrique de la droite d'intersection

Exemple 1 : Décrire comment les plans de chaque paire se croisent.

a) $\pi_1 : 2x - y + z - 1 = 0$

$\pi_2 : x + y + z - 6 = 0$

$\vec{n_1} = [2, \ -1, \ 1]$, $\vec{n_2} = [1, \ 1, \ 1]$

$\vec{n_1} \neq k\vec{n_2}$

Les normales ne sont pas parallèles et donc les plans ne sont pas parallèles. Cela signifie qu'ils se croisent selon une droite.

① $2x - y + z - 1 = 0$

② $x + y + z - 6 = 0$

① + ② : $3x + 2z - 7 = 0$

Assigner une variable pour être le paramètre t. Poser $z = t$ puis écrire les deux autres variables en fonction de t.

$3x + 2t - 7 = 0$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$x = -\frac{2}{3}t + \frac{7}{3}$

$\left(-\frac{2}{3}t + \frac{7}{3}\right) + y + t - 6 = 0$

$\frac{1}{3}t + y - \frac{11}{3} = 0$

$y = -\frac{1}{3}t + \frac{11}{3}$

Les équations paramétriques de la droite d'intersection sont : $\ell : \begin{cases} x = -\frac{2}{3}t + \frac{7}{3} \\ y = -\frac{1}{3}t + \frac{11}{3} \\ z = t \end{cases}$

Note : le vecteur directeur a été simplifié

L'équation vectorielle est : $[x,\ y,\ z] = \left[\frac{7}{3},\ \frac{11}{3},\ 0\right] + t[-2,\ -1,\ 3]$

b) $\pi_3 : 2x - 6y + 4z - 7 = 0$

$\pi_4 : 3x - 9y + 6z - 2 = 0$

$\vec{n_3} = [2,\ -6,\ 4]$, $\vec{n_4} = [3,\ -9,\ 6]$

$1.5\vec{n_3} = \vec{n_4}$

Les normales sont parallèles. Donc, les plans sont parallèles. Ils sont soit confondus, soit distincts. Résoudre par élimination pour voir si on obtient une infinité de solutions ou aucune solution.

$3\times③ : \quad 6x - 18y + 12z = 21$

$2\times④ : \quad 6x - 18y + 12z = 4$

$0 = 17$

Cette équation n'est jamais vraie. Donc, il n'y a aucune solution et les plans sont parallèles et distincts.

c) $\pi_5 : x + y - 2z + 2 = 0$

$\pi_6 : 2x + 2y - 4z + 4 = 0$

$\vec{n_5} = [1,\ 1,\ -2]$, $\vec{n_6} = [2,\ 2,\ -4]$

$2\vec{n_5} = \vec{n_6}$

Les normales sont parallèles. Donc, les plans sont parallèles. Ils sont soit confondus, soit distincts. Résoudre par élimination pour voir si on obtient une infinité de solutions ou aucune solution.

$2\times⑤ : \quad 2x + 2y - 4z = -4$

$⑥ : \quad 2x + 2y - 4z = -4$

$0 = 0$

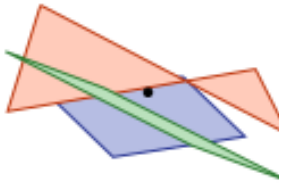
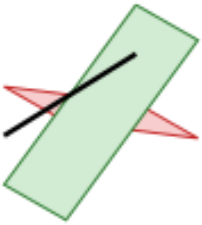
Cette équation est toujours vraie. Donc, il y a une infinité de solutions. Les plans sont confondus.

Partie 2 : Intersection de 3 plans

Un système de trois plans est cohérent s'il a une ou plusieurs solutions. Un système de trois plans est incohérent s'il n'a aucune solution.

3 scénarios de solutions cohérentes :

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Intersection en 1 point	Intersection selon une droite	Infinité de solutions
		
Les normales ne sont pas parallèles et ne sont pas coplanaires.	Les normales ne sont pas parallèles mais elles sont coplanaires.	Les normales sont parallèles et les équations sont des multiples scalaires les unes des autres.

Les normales sont parallèles si chacune est un multiple scalaire des autres.

Les normales sont coplanaires si $\vec{n_1} \cdot \vec{n_2} \times \vec{n_3} = 0$

Exemple 2 : Pour chaque ensemble de plans, décrire le nombre de solutions et comment les plans se croisent.

a) $\pi_1 : 2x + y + 6z - 7 = 0$

$\pi_2 : 3x + 4y + 3z + 8 = 0$

$\pi_3 : x - 2y - 4z - 9 = 0$

Les normales ne sont pas parallèles. Donc, elles se croisent en un point ou selon une droite.

Éliminer une variable en utilisant deux paires d'équations différentes :

① $2x + y + 6z = 7$

$2\times$② $6x + 8y + 6z = -16$

$-4x - 7y = 23$

$2\times$① $4x + 2y + 12z = 14$

$3\times$③ $3x - 6y - 12z = 27$

$7x - 4y = 41$

$7\times(① - ②)$: $-28x - 49y = 161$

$4\times(① + ③)$: $28x - 16y = 164$

$-65y = 325$

$y = -5$

Maintenant qu'on a une solution unique pour une variable, on peut la substituer dans les équations précédentes pour résoudre les variables restantes :

$-4x - 7(-5) = 23$

$x = 3$

$2x + y + 6z = 7$: $2(3) + (-5) + 6z = 7$

$z = 1$

Les trois plans forment un système cohérent. Le point d'intersection est $(3, -5, 1)$.

b) $\pi_4 : x - 5y + 2z - 10 = 0$

$\pi_5 : x + 7y - 2z + 6 = 0$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$\pi_6 : 8x + 5y + z - 20 = 0$

Les normales ne sont pas parallèles. Donc, elles se croisent en un point ou selon une droite.

Éliminer une variable en utilisant deux paires d'équations différentes :

④ $x - 5y + 2z = 10$

⑤ $x + 7y - 2z = -6$

$2x + 2y = 4$

$2\times$⑥ $16x + 10y + 2z = 40$

$-15x - 15y = -30$

$-\frac{1}{15}\times(④ - ⑥) :$ $x + y = 2$

$\frac{1}{2}\times(④ + ⑤) :$ $x + y = 2$

$0 = 0$

Cela signifie qu'il y a une infinité de valeurs de x et y qui satisfont les équations. Donc, elles se croisent selon une droite. Écrire les équations paramétriques de la droite. Commencer par poser une variable égale à un paramètre :

$x = t$

$x + y = 2 :$ $t + y = 2$

$y = 2 - t$

$x - 5y + 2z = 10 :$ $t - 5(2 - t) + 2z = 10$

$t - 10 + 5t + 2z = 10$

$2z = -6t + 20$

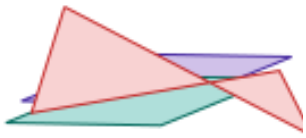
$z = -3t + 10$

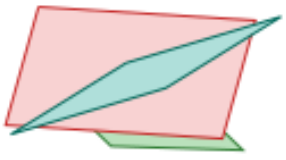
Équations paramétriques : $\ell : \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t \\ z = 10 - 3t \end{cases}$

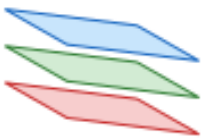
Équation vectorielle : $[x, y, z] = [0, 2, 10] + t[1, -1, -3]$

3 scénarios de solutions incohérentes :

2 plans sont parallèles et le troisième croise les deux plans parallèles	**Les plans se croisent deux à deux**	**Les plans sont parallèles et au moins deux sont distincts**







Deux normales sont parallèles mais la troisième ne l'est pas	Les normales ne sont pas parallèles mais elles sont coplanaires.	Les normales sont parallèles mais les équations ne sont pas des multiples scalaires les unes des autres

Exemple 3 : Pour chaque ensemble de plans, décrire le nombre de solutions et comment les plans se croisent.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 3 : Pour chaque ensemble de plans, décrire le nombre de solutions et comment les plans se croisent.

a) $\pi_1 : 3x + y - 2z = 12$

$\pi_2 : 3x - 5y + z = 8$

$\pi_3 : 12x + 4y - 8z = -4$

π_1 et π_3 sont parallèles puisque $4\vec{n_1} = \vec{n_3}$ mais π_2 ne leur est pas parallèle. $\pi_1 \neq k\pi_3$, donc ils sont parallèles mais distincts. C'est un système incohérent avec deux plans parallèles mais distincts qui sont croisés par un troisième plan.

b) $\pi_4 : x + 3y - z = -10$

$\pi_5 : 2x + y + z = 8$

$\pi_6 : x - 2y + 2z = -4$

Aucune des normales n'est un multiple scalaire d'une autre, donc aucun des plans n'est parallèle. Ils se croisent soit en un point, soit selon une droite, soit pas du tout. Résoudre par élimination pour déterminer de quel scénario il s'agit :

④ $x + 3y - z = -10$

⑤ $2x + y + z = 8$

$3x + 4y = -2$

$2\times$④ $2x + 6y - 2z = -20$

⑥ $x - 2y + 2z = -4$

$3x + 4y = -24$

(④ + ⑤) : $3x + 4y = -2$

(④ + ⑥) : $3x + 4y = -24$

$0 = 22$

Il n'y a aucune solution à cette équation. Donc, c'est un système incohérent sans solution. Les plans doivent se croiser deux à deux.

c) $\pi_7 : 4x - 2y + 6z = 35$

$\pi_8 : -10x + 5y - 15z = 20$

$\pi_9 : 6x - 3y + 9z = -50$

Remarquer que les normales entre chaque paire de plans sont des multiples constants les unes des autres. Donc, les plans sont tous parallèles. Cependant, aucun des plans n'est un multiple scalaire d'un autre, donc ils sont tous parallèles mais distincts. Il n'y a aucun point d'intersection.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.