6.6 Leçon sur l'intersection de droites et de plans avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Intersections de droites et de plans

Étant donné une droite et un plan dans un espace à trois dimensions, il y a trois possibilités pour l'intersection de la droite avec le plan :

Intersection en 1 point	Infinité de solutions	Aucune solution
		
	La droite se trouve sur le plan	La droite est parallèle et distincte du plan

Exemple 1 : Dans chaque cas, déterminer si la droite et le plan se croisent. Si oui, déterminer la solution.

a) $\pi_1 : 9x + 13y - 2z = 29$

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -5 - 5t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Substituer les équations paramétriques dans l'équation scalaire du plan :

$9(5 + 2t) + 13(-5 - 5t) - 2(2 + 3t) = 29$

$45 + 18t - 65 - 65t - 4 - 6t = 29$

$-53t = 53$

$t = -1$

Puisqu'une seule valeur de t a été trouvée, la droite et le plan se croisent en 1 point. Substituer $t = -1$ dans les équations paramétriques :

$x = 5 + 2(-1) = 3$

$y = -5 - 5(-1) = 0$

$z = 2 + 3(-1) = -1$

La droite et le plan se croisent au point $(3, 0, -1)$.

b) $\pi_2 : x + 3y - 4z = 10$

$$\ell_2 : \begin{cases} x = 4 + 6t \\ y = -7 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

Substituer les équations paramétriques dans l'équation scalaire du plan :

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$(4 + 6t) + 3(-7 + 2t) - 4(1 + 3t) = 10$

$4 + 6t - 21 + 6t - 4 - 12t = 10$

$0t = 31$

Il n'y a aucune valeur de t qui peut rendre cette équation vraie. Donc, la droite et le plan ne se croisent pas. La droite est parallèle et distincte du plan.

c) $\pi_3 : 4x - y + 11z = -1$

$\ell_3 : [x, y, z] = [-2, 4, 1] + t[3, 1, -1]$

Substituer les équations paramétriques dans l'équation scalaire du plan :

$4(-2 + 3t) - (4 + t) + 11(1 - t) = -1$

$-8 + 12t - 4 - t + 11 - 11t = -1$

$0t = 0$

Cette équation est vraie pour toutes les valeurs de t. Il y a une infinité de solutions. Tout point sur la droite est une solution. La droite se trouve sur le plan.

Exemple 2 : Sans résoudre, déterminer si chaque droite croise le plan.

a) $\pi_1 : 3x - y + z = -6$

$\ell_1 : [x, y, z] = [2, -5, 3] + s[3, 2, 1]$

Vérifier si le plan et la droite sont parallèles en comparant le vecteur directeur de la droite, $\vec{m} = [3, 2, 1]$ *avec le vecteur normal du plan* $\vec{n} = [3, -1, 1]$. *S'ils sont perpendiculaires l'un à l'autre, alors la droite et le plan doivent être parallèles. Trouver le produit scalaire pour analyser :*

$\vec{m} \cdot \vec{n} = [3, 2, 1] \cdot [3, -1, 1]$

$\vec{m} \cdot \vec{n} = 8$

Puisque $\vec{m} \cdot \vec{n} \neq 0$, $\vec{m}$ et $\vec{n}$ ne sont pas perpendiculaires. Donc, la droite et le plan ne sont PAS parallèles et doivent avoir un point d'intersection.

b) $\pi_2 : 4x - 2z = 11$

$\ell_2 : [x, y, z] = [1, 0, 1] + s[-2, 1, -4]$

Vérifier si le plan et la droite sont parallèles en comparant le vecteur directeur de la droite, $\vec{m} = [-2, 1, -4]$ *avec le vecteur normal du plan* $\vec{n} = [4, 0, -2]$. *S'ils sont perpendiculaires l'un à l'autre, alors la droite et le plan doivent être parallèles. Trouver le produit scalaire pour analyser :*

$\vec{m} \cdot \vec{n} = [-2, 1, -4] \cdot [4, 0, -2]$

$\vec{m} \cdot \vec{n} = -2(4) + 1(0) + (-4)(-2)$

$\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$

Puisque $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$, $\vec{m}$ *et* $\vec{n}$ *SONT perpendiculaires. Donc, la droite et le plan SONT parallèles et soit n'ont aucune solution (parallèles et distincts), soit ont une infinité de solutions (la droite est sur le plan). Vérifier si le point* $(1, 0, 1)$ *se trouve sur le plan pour déterminer quelle situation s'applique :*

$MG = 4(1) - 2(1)$

$MD = 11$

$MG = 2$

$MG \neq MD$, donc la droite ne se trouve pas sur le plan. Il n'y a aucune solution à ce système. La droite et le plan sont parallèles et distincts.

Partie 2 : Distance entre un point et un plan

Rappel : la formule pour la norme de la projection de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ est $|proj_{\vec{b}} \vec{a}| = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|}$

La distance la plus courte entre un point et un plan est la distance perpendiculaire. Cette distance, d, entre un point

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

P et un plan est $d = |proj_{\vec{n}} \overrightarrow{PQ}| = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$ où Q est N'IMPORTE QUEL point sur le plan et $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan.

Exemple 3 : Trouver la distance entre le plan $4x + 2y + z - 16 = 0$ et le point $P(10,\ 3,\ -8)$.

Trouver un point Q quelconque sur le plan en choisissant des valeurs arbitraires pour x et y :

$4(1) + 2(1) + z - 16 = 0$

$z = 10$

Le point $Q(1,\ 1,\ 10)$ se trouve sur le plan.

Vecteur $\overrightarrow{PQ} = [1,\ 1,\ 10] - [10,\ 3,\ -8] = [-9,\ -2,\ 18]$

Un vecteur normal au plan est $\vec{n} = [4,\ 2,\ 1]$

$$d = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$d = \frac{|[-9,\ -2,\ 18] \cdot [4,\ 2,\ 1]|}{\sqrt{(4)^2 + (2)^2 + (1)^2}}$$

$$d = \frac{22}{\sqrt{21}}$$

$d \cong 4.8$ unités

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.