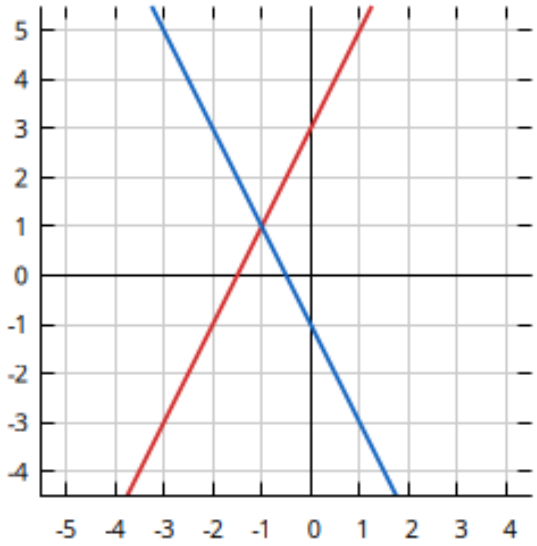
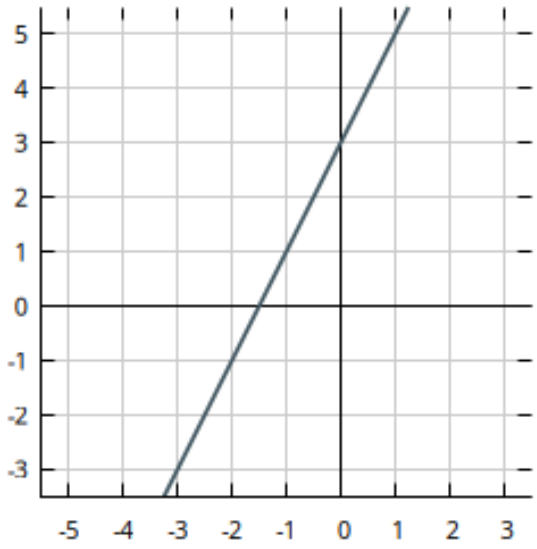
6.5 Leçon sur les intersections de droites en deux dimensions et en trois dimensions avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

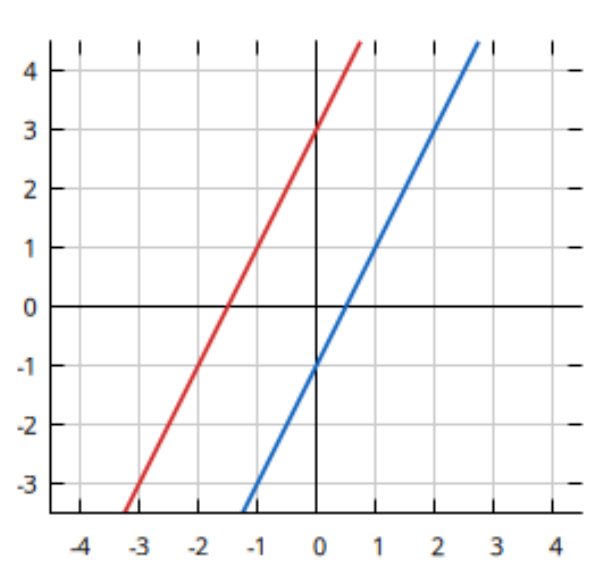
Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Intersections de droites en deux dimensions

Possibilités d'intersection de droites en deux dimensions :

Intersections	Graphique	Équations
1 intersection en un point		$y = 2x + 3$ $y = -2x - 1$
Infinité de points d'intersection (parallèles et confondues)		$y = 2x + 3$ $y = 2x + 3$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Aucun point d'intersection (parallèles et distinctes)		$y = 2x + 3$ $y = 2x - 1$

Remarque : Les systèmes linéaires en deux dimensions peuvent être résolus par substitution ou par élimination.

Exemple 1 : Trouver les solutions de chaque système, si elles existent.

a) $\ell_1 : 4x - 6y = -10$

$\ell_2 : 6x - 9y = -15$

$3 \times \ell_1 \rightarrow 12x - 18y = -30$

$2 \times \ell_2 \rightarrow 12x - 18y = -30$

Soustraire : $0 = 0$

Donc, il y a une infinité de solutions parce que ces droites sont parallèles et confondues (même droite).

b) $\ell_1 : [x, y] = [1, 5] + s[-6, 8]$

$\ell_2 : [x, y] = [2, 1] + t[9, -12]$

Écrire sous forme paramétrique :

$\ell_1 : \begin{cases} x = 1 - 6s \\ y = 5 + 8s \end{cases}$ $\ell_2 : \begin{cases} x = 2 + 9t \\ y = 1 - 12t \end{cases}$

Égaler les variables x et y :

$1 - 6s = 2 + 9t \rightarrow -1 = 9t + 6s$

$5 + 8s = 1 - 12t \rightarrow -4 = 12t + 8s$

Résoudre par élimination :

$4 \times (-1 = 9t + 6s) \rightarrow -4 = 36t + 24s$

$3 \times (-4 = 12t + 8s) \rightarrow -12 = 36t + 24s$

Soustraire : $8 = 0$

Donc, il n'y a aucune solution à ce système. Les droites sont parallèles et distinctes.

c) $\ell_1 : [x, y] = [3, 4] + s[3, -2]$

$\ell_2 : [x, y] = [-2, -2] + t[3, 5]$

Écrire sous forme paramétrique :

$\ell_1 : \begin{cases} x = 3 + 3s \\ y = 4 - 2s \end{cases}$ $\ell_2 : \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$

Égaler les variables x et y :

$3 + 3s = -2 + 3t \rightarrow 5 = 3t - 3s$

$4 - 2s = -2 + 5t \rightarrow 6 = 5t + 2s$

Résoudre maintenant par élimination :

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$2\times(5 = 3t - 3s) \rightarrow 10 = 6t - 6s$

$3\times(6 = 5t + 2s) \rightarrow 18 = 15t + 6s$

Additionner : $28 = 21t$

$t = \frac{4}{3}$

Substituer $t = \frac{4}{3}$ dans ℓ_2 :

$x = -2 + 3\left(\frac{4}{3}\right)\ y = -2 + 5\left(\frac{4}{3}\right)$

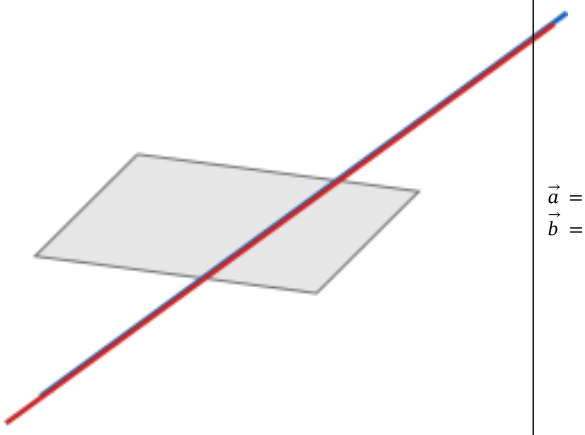
$x = 2\ y = \frac{14}{3}$

Remarque : On pourrait à ce stade résoudre pour s et vérifier qu'on obtient la même solution. Cette étape sera nécessaire pour résoudre les systèmes en trois dimensions.

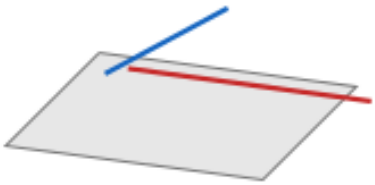
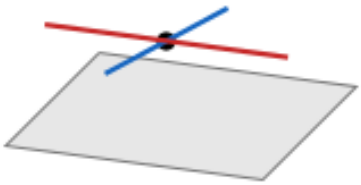
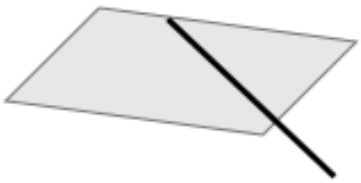
Il y a une unique solution à $\left(2,\ \frac{14}{3}\right)$

Partie 2 : Intersections de droites en trois dimensions

Possibilités d'intersection de droites en trois dimensions :

Intersections	Graphique	Équations
Aucune intersection (parallèles et distinctes)		$\vec{a} = [-1,\ 4,\ 2] + s[-2,\ 2,\ 2]$ $\vec{b} = [1,\ 3,\ 1] + t[-2,\ 2,\ 2]$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Aucune intersection (non parallèles mais gauches)		$\vec{a} = [-3, -2, 4] + s[1, 1, 1]$ $\vec{b} = [2, 5, 4] + t[-2, 4, -1]$
1 intersection (non parallèles mais sur l même plan)		$\vec{a} = [-3, -2, 4] + s[1, 1, 1]$ $\vec{b} = [-3, -2, 4] + t[-2, 4, -1]$
Infinité de points d'inter- section (parallèles et confondues		$\vec{a} = [-1, 4, -2] + s[-2, 1, -3]$ $\vec{b} = [1, 3, 1] + t[-2, 1, -3]$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Étapes pour résoudre l'intersection de droites en trois dimensions :

La première étape consiste toujours à vérifier si les vecteurs directeurs sont parallèles ou non en les comparant et en voyant si l'un est un multiple scalaire de l'autre ($\overrightarrow{m_1} = k\overrightarrow{m_2}$)

a. Si **oui**, il peut y avoir une infinité de solutions OU aucune solution. Vérifier si un point se trouve sur les deux droites, ou simplement résoudre le système et voir si on obtient aucune solution ou une infinité de solutions.

b. Si **non**, elles peuvent se croiser en un point OU être gauches et ne jamais se croiser. Essayer de résoudre le système et voir si on peut trouver des paramètres qui rendent les équations égales. Si c'est possible, substituer l'un ou l'autre paramètre dans une droite d'origine et résoudre pour le point d'intersection.

Exemple 2 : Déterminer si les droites se croisent. Si oui, trouver les coordonnées du point d'intersection.

a) $\ell_1 : [x,\ y,\ z] = [5,\ 11,\ 2] + s[1,\ 5,\ -2]$

$\ell_2 : [x,\ y,\ z] = [1,\ -9,\ 9] + t[2,\ 10,\ -4]$

Étape 1 : Vérifier si les droites sont parallèles.

$[1,\ 5,\ -2] = k[2,\ 10,\ -4]$

$k = \frac{1}{2}$ satisfait cette équation, donc elles sont parallèles.

Étape 2 : Vérifier si $(5,\ 11,\ 2)$ *se trouve sur* ℓ_2*. Si le point se trouve sur les deux droites, elles sont confondues (infinité de solutions). S'il ne se trouve pas sur les deux droites, elles sont parallèles et distinctes (aucune solution).*

$$\ell_2 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -9 + 10t \\ z = 9 - 4t \end{cases}$$

$5 = 1 + 2t \rightarrow t = 2$

$11 = -9 + 10t \rightarrow t = 2$

$2 = 9 - 4t \rightarrow t = \frac{7}{4}$

Puisqu'il n'y a pas de valeur unique de t qui satisfait cette équation, le point $(5,\ 11,\ 2)$ ne se trouve pas sur ℓ_2 et donc les droites sont parallèles et distinctes. Cela signifie qu'il n'y a aucune solution.

Il s'agissait d'une solution par raisonnement géométrique. On pourrait aussi résoudre algébriquement.

b) $\ell_1 : [x,\ y,\ z] = [7,\ 2,\ -6] + s[2,\ 1,\ -3]$

$\ell_2 : [x,\ y,\ z] = [3,\ 9,\ 13] + t[1,\ 5,\ 5]$

$[2,\ 1,\ -3] \neq k[1,\ 5,\ 5]$; donc, ces droites ne sont pas parallèles et se croisent soit une fois, soit jamais (gauches).

Écrire sous forme paramétrique :

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 7 + 2s \\ y = 2 + s \\ z = -6 - 3s \end{cases} \qquad \ell_2 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 9 + 5t \\ z = 13 + 5t \end{cases}$$

Égaler les variables :

$7 + 2s = 3 + t \rightarrow 4 = t - 2s$

$2 + s = 9 + 5t \rightarrow -7 = 5t - s$

$-6 - 3s = 13 + 5t \rightarrow -19 = 5t + 3s$

Résoudre pour t et s par élimination avec une paire d'équations quelconque :

$4 = t - 2s$

$2\times(-7 = 5t - s) \rightarrow -14 = 10t - 2s$

Soustraire : $18 = -9t$

$t = -2$

Substituer $t = -2$ dans $4 = t - 2s$:

$4 = -2 - 2s$

$s = -3$

Il faut maintenant vérifier que ces valeurs de s et t satisfont aussi la troisième équation :

MG $= -19$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$\text{MD} = 5(-2) + 3(-3) = -19$

MG = MD. Donc, ces droites se croisent en un seul point. Substituer $s = -3$ dans ℓ_1 :

$[x, y, z] = [7, 2, -6] - 3[2, 1, -3]$

$[x, y, z] = [1, -1, 3]$

Le point d'intersection est $(1, -1, 3)$

c) $\ell_1 : [x, y, z] = [5, -4, -2] + s[1, 2, 3]$

$\ell_2 : [x, y, z] = [2, 0, 1] + t[2, -1, -1]$

$[1, 2, 3] \neq k[2, -1, -1]$; donc, ces droites ne sont pas parallèles et se croisent soit une fois, soit jamais (gauches).

Écrire sous forme paramétrique :

$$\ell_1 : \begin{cases} x = 5 + s \\ y = -4 + 2s \\ z = -2 + 3s \end{cases} \quad \ell_2 : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Égaler les variables :

$5 + s = 2 + 2t \rightarrow 3 = 2t - s$

$-4 + 2s = -t \rightarrow 4 = t + 2s$

$-2 + 3s = 1 - t \rightarrow 3 = t + 3s$

Résoudre pour t et s par élimination avec une paire d'équations quelconque :

$3 = 2t - s$

$2 \times (4 = t + 2s) \rightarrow 8 = 2t + 4s$

Soustraire : $-5 = -5s$

$s = 1$

Substituer $s = 1$ dans $3 = 2t - s$:

$3 = 2t - 1 \rightarrow t = 2$

Il faut maintenant vérifier que ces valeurs de s et t satisfont aussi la troisième équation :

$\text{MG} = 3$

$\text{MD} = 2 + 3(1) = 5$

MG ≠ MD. Donc, ces droites sont gauches et ne se croisent PAS. Aucune solution.

Partie 3 : Distance entre deux droites gauches

La distance la plus courte entre des droites gauches est la longueur de la perpendiculaire commune. Elle peut être calculée à l'aide de la formule $d = \left|\frac{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$, où P_1 et P_2 sont des points quelconques sur chaque droite et $\vec{n} = \overrightarrow{m_1} \times \overrightarrow{m_2}$ est une normale commune aux deux droites.

Remarquer que ceci découle de la formule de projection vue dans l'unité précédente : $|proj_{\vec{b}}\, \vec{a}| = \left|\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}\right|$

Exemple 3 : Déterminer la distance entre les droites gauches.

$\ell_1 : [x, y, z] = [5, -4, -2] + s[1, 2, 3]$

$\ell_2 : [x, y, z] = [2, 0, 1] + t[2, -1, -1]$

Commencer par calculer $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$\overrightarrow{P_1P_2} = [2, 0, 1] - [5, -4, -2]$

$\overrightarrow{P_1P_2} = [-3, 4, 3]$

Trouver un vecteur normal commun en faisant le produit vectoriel des deux vecteurs directeurs :

$\vec{n} = [1, 2, 3] \times [2, -1, -1]$

$\vec{n} = [2(-1) - 3(-1), 3(2) - 1(-1), 1(-1) - 2(2)]$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$\vec{n} = [1,\ 7,\ -5]$

$d = \left|\frac{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$

$d = \left|\frac{[-3,\ 4,\ 3] \cdot [1,\ 7,\ -5]}{\sqrt{(1)^2 + (7)^2 + (-5)^2}}\right|$

$d = \left|\frac{10}{\sqrt{75}}\right|$

$d = \frac{10}{5\sqrt{3}}$

$d = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$d \cong 1.15$ unités

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.