5.6 Leçon sur les applications du produit scalaire et du produit vectoriel avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Moment de force

Le moment de force, τ, est une mesure de la force agissant sur un objet qui le fait tourner. Le moment de force est le produit vectoriel de la force et du bras de levier. Le moment de force est mesuré en $N \cdot m$ (newtons-mètres).

$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$

$|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin\theta$

$\vec{F}$ est la force agissant sur l'objet

$\vec{r}$ représente le bras de levier et pointe de l'axe de rotation jusqu'au point où la force est appliquée

θ est l'angle entre $\vec{r}$ et $\vec{F}$

Utiliser la règle de la main droite pour déterminer la direction du vecteur moment de force.

Exemple 1 : Une clé est utilisée pour serrer un boulon. Une force de 60 N est appliquée dans le sens horaire à 80° par rapport au manche, à 20 cm du centre du boulon.

a) Calculer la norme du moment de force
Remarque : assurez-vous de convertir le vecteur de déplacement en mètres.

$|\vec{\tau}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin\theta$

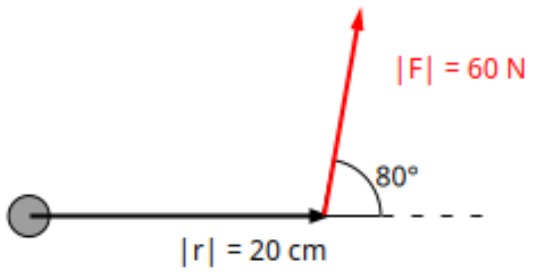
$|\vec{\tau}| = (0.2)(60)\sin 80$

$|\vec{\tau}| \cong 11.8\ N \cdot m$

b) Dans quelle direction pointe le vecteur moment de force?

Vers le bas, dans le matériau.

Le boulon est donc en train d'être serré.



Partie 2 : Projection et travail

Les projections dans $\mathbb{R}^3$ sont semblables aux projections dans $\mathbb{R}^2$, alors vous pouvez utiliser la même formule : $proj_{\vec{b}}\,\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}}(\vec{b})$

Exemple 2 : Pour les vecteurs $\vec{v} = [4,\ 2,\ 7]$ et $\vec{u} = [6,\ 3,\ 8]$

a) Trouver $proj_{\vec{u}}\,\vec{v}$

$proj_{\vec{u}}\,\vec{v} = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}(\vec{u})$

$proj_{\vec{u}}\,\vec{v} = \dfrac{4(6) + 2(3) + 7(8)}{6^2 + 3^2 + 8^2}[6,\ 3,\ 8]$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$proj_{\vec{u}}\,\vec{v} = \frac{86}{109}[6,\ 3,\ 8]$

b) Trouver la norme de la projection

$|proj_{\vec{u}}\,\vec{v}| = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{u}|}{|\vec{u}|}$

$|proj_{\vec{u}}\,\vec{v}| = \frac{86}{\sqrt{109}}$

Ou simplement trouver la norme du vecteur trouvé en a) : $\left|\frac{86}{109}[6,\ 3,\ 8]\right| = \frac{86}{109}\|[6,\ 3,\ 8]\| = \frac{86}{109}\sqrt{109} = \frac{86}{\sqrt{109}}$

Rappel : Le travail effectué est le produit de la norme du déplacement parcouru par un objet et de la norme de la force appliquée dans la direction du mouvement (utiliser le produit scalaire pour la trouver). Les unités sont les joules (J).

Exemple 3 : Une force dont les unités sont en newtons et définie par $\vec{F} = [300,\ 700,\ 500]$ agit sur un objet dont le déplacement, en mètres, est défini par $\vec{d} = [3,\ 1,\ 12]$.

a) Déterminer le travail effectué dans la direction du déplacement.

$W = \vec{F}\cdot\vec{d}$

$W = 300(3) + 700(1) + 500(12)$

$W = 7600\ J$

b) Déterminer le travail effectué contre la gravité, une force dans la direction de l'axe des z négatif.

Utiliser seulement les composantes verticales pour calculer le travail contre la gravité.

$W = [0,\ 0,\ 500]\cdot[0,\ 0,\ 12]$

$W = 0(0) + 0(0) + 500(12)$

$W = 6000\ J$

Partie 3 : Produit mixte et volume d'un parallélépipède

Le produit mixte

Certaines situations nécessitent une combinaison du produit scalaire et du produit vectoriel. Le produit mixte, $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c}$, est l'une de ces combinaisons. Puisque le produit scalaire est un scalaire, cette combinaison n'a de sens que si le produit vectoriel est effectué en premier.

Exemple 4 : Considérer les vecteurs $\vec{u} = [4,\ 3,\ 1]$, $\vec{v} = [2,\ 5,\ 6]$, et $\vec{w} = [10,\ -3,\ -14]$. Évaluer l'expression $\vec{u}\times\vec{v}\cdot\vec{w}$

$\vec{u}\times\vec{v}\cdot\vec{w} = [4,\ 3,\ 1]\times[2,\ 5,\ 6]\cdot[10,\ -3,\ -14]$

$\vec{u}\times\vec{v}\cdot\vec{w} = [3(6) - 1(5),\ 1(2) - 4(6),\ 4(5) - 3(2)]\cdot[10,\ -3,\ -14]$

$\vec{u}\times\vec{v}\cdot\vec{w} = [13,\ -22,\ 14]\cdot[10,\ -3,\ -14]$

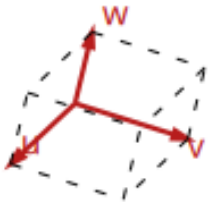
$\vec{u}\times\vec{v}\cdot\vec{w} = 13(10) + (-22)(-3) + 14(-14)$

$\vec{u}\times\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Volume d'un parallélépipède

Un parallélépipède est une figure tridimensionnelle formée de six parallélogrammes. En général, le volume du parallélépipède défini par les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$ est donné par $V = |\vec{w} \cdot \vec{u} \times \vec{v}|$.



Exemple 5 : Déterminer le volume du parallélépipède défini par $\vec{a} = [6,\ 3,\ -2]$, $\vec{b} = [-4,\ 6,\ 9]$ et $\vec{c} = [3,\ 3,\ -11]$

$V = |\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}|$

$V = |[6,\ 3,\ -2] \cdot [-4,\ 6,\ 9] \times [3,\ 3,\ -11]|$

$V = |[6,\ 3,\ -2] \cdot [6(-11) - 9(3),\ 9(3) - (-4)(-11),\ (-4)(3) - 6(3)]|$

$V = |[6,\ 3,\ -2] \cdot [-93,\ -17,\ -30]|$

$V = |6(-93) + 3(-17) + (-2)(-30)|$

$V = |-549|$

$V = 549$ unités^3

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.