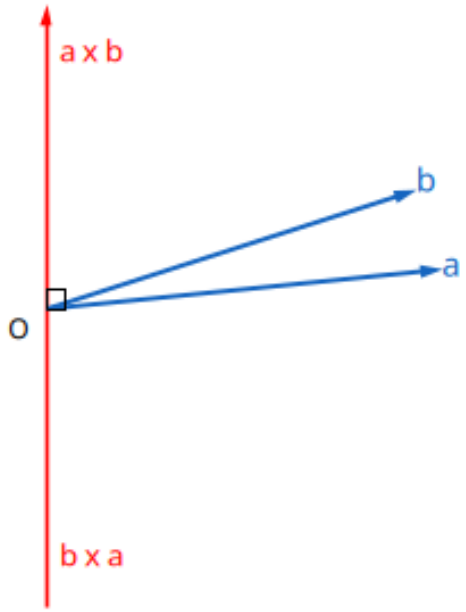
5.5 Leçon sur le produit vectoriel avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

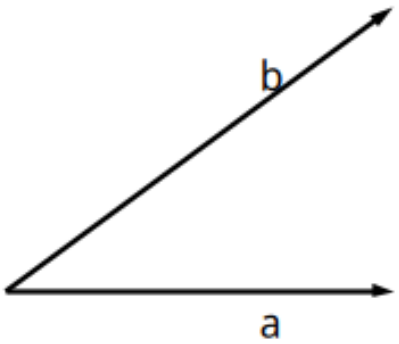
Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ dans $\mathbb{R}^3$ est le vecteur **perpendiculaire** à ces vecteurs tel que les vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, et $\vec{a}\times\vec{b}$ forment un système dextrogyre (système orienté positivement).

Pour un système dextrogyre, pointez votre main dans la direction du vecteur $\vec{a}$ et recourbez vos doigts vers le vecteur $\vec{b}$. Votre pouce pointera dans la direction de $\vec{a}\times\vec{b}$. Remarquez que $\vec{a}\times\vec{b}$ et $\vec{b}\times\vec{a}$ pointent dans des directions opposées.



Parfois, la direction du produit vectoriel est définie soit comme « sortant de la page » soit comme « entrant dans la page » :

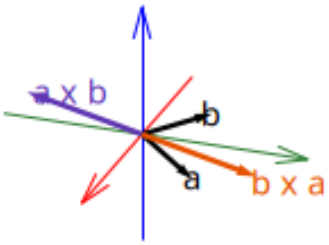


$\vec{a}\times\vec{b}$	$\vec{b}\times\vec{a}$
« Sortant de la page »	« Entrant dans la page »

Visualisation 3D :

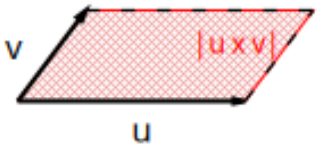
www.geogebra.org/3d/jyqcr3bf

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



Propriétés du produit vectoriel :

- $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{v}\times\vec{u})$
- $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\times\vec{v} + \vec{u}\times\vec{w}$
- $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} = \vec{u}\times\vec{w} + \vec{v}\times\vec{w}$
- Si $\vec{u}\times\vec{v} = 0$, et que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $k(\vec{u}\times\vec{v}) = (k\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(k\vec{v})$
- $|\vec{u}\times\vec{v}| =$ l'aire du parallélogramme défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$



Partie 2 : Produit vectoriel de vecteurs géométriques

Formule : $\vec{a}\times\vec{b} = (|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta)\hat{n}$

θ est l'angle entre les vecteurs

$\hat{n}$ est un vecteur unitaire perpendiculaire à la fois à $\vec{a}$ et à $\vec{b}$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 1 : Si $|\vec{u}| = 30$, $|\vec{v}| = 20$, l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est 40°, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dans le plan de la page, déterminer…

a) $\vec{u} \times \vec{v}$

$\vec{u} \times \vec{v} = (|\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta)\hat{n}$

$\vec{u} \times \vec{v} = [(30)(20)\sin 40]\hat{n}$

$\vec{u} \times \vec{v} \cong 385.7\hat{n}$

$\vec{u} \times \vec{v} \cong 385.7$ sortant de la page

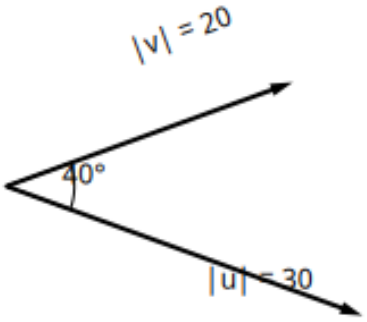
b) $\vec{v} \times \vec{u}$

$\vec{v} \times \vec{u} = (|\vec{v}||\vec{u}| \sin\theta)\hat{n}$

$\vec{v} \times \vec{u} = [(20)(30)\sin 40](-\hat{n})$

$\vec{v} \times \vec{u} \cong -385.7\hat{n}$

$\vec{v} \times \vec{u} \cong 385.7$ entrant dans la page



Partie 3 : Produit vectoriel de vecteurs algébriques

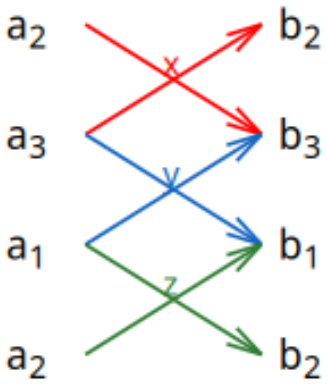
Formule :

Si $\vec{a} = [a_1, a_2, a_3]$ et $\vec{b} = [b_1, b_2, b_3]$

$\vec{a} \times \vec{b} = [a_2b_3 - a_3b_2,\ a_3b_1 - a_1b_3,\ a_1b_2 - a_2b_1]$

$= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$

Comment s'y prendre :

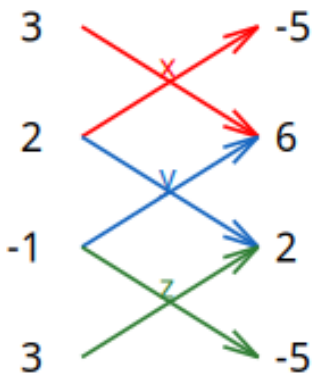


Exemple 2 : Si $\vec{p} = [-1, 3, 2]$ et $\vec{q} = [2, -5, 6]$, calculer chacune des expressions suivantes :

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 2 : Si $\vec{p} = [-1,\ 3,\ 2]$ et $\vec{q} = [2,\ -5,\ 6]$, calculer chacune des expressions suivantes :

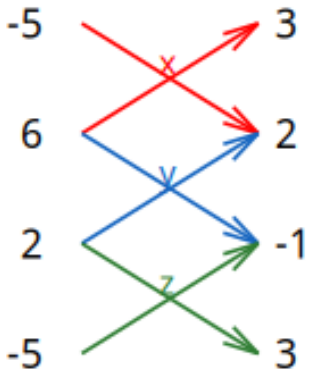
a) $\vec{p} \times \vec{q}$



$\vec{p} \times \vec{q} = [3(6) - 2(-5),\ 2(2) - (-1)(6),\ (-1)(-5) - (3)(2)]$

$\vec{p} \times \vec{q} = [28,\ 10,\ -1]$

b) $\vec{q} \times \vec{p}$



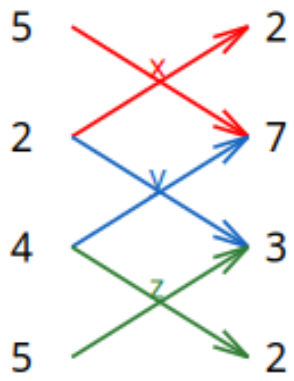
$\vec{q} \times \vec{p} = [(-5)(2) - 6(3),\ 6(-1) - 2(2),\ 2(3) - (-5)(-1)]$

$\vec{q} \times \vec{p} = [-28,\ -10,\ 1]$

Remarquez que $\vec{q} \times \vec{p} = -1(\vec{p} \times \vec{q})$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 3a : Déterminer l'aire du parallélogramme défini par les vecteurs $\vec{u} = [4,\ 5,\ 2]$ et $\vec{v} = [3,\ 2,\ 7]$.



$\vec{u} \times \vec{v} = [5(7) - 2(2),\ 2(3) - 4(7),\ 4(2) - 5(3)]$

$\vec{u} \times \vec{v} = [31,\ -22,\ -7]$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(31)^2 + (-22)^2 + (-7)^2}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{1494}$

$|\vec{u} \times \vec{v}| \cong 38.7$ unités^2

Exemple 3b : Déterminer l'angle entre les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$|\vec{u} \times \vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin\theta$

$$\sin\theta = \frac{|\vec{u} \times \vec{v}|}{|\vec{u}||\vec{v}|}$$

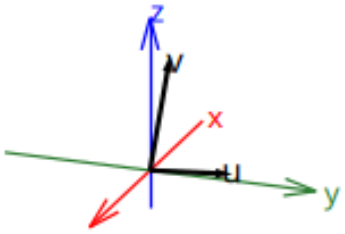
$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1494}}{\left(\sqrt{4^2 + 5^2 + 2^2}\right)\left(\sqrt{3^2 + 2^2 + 7^2}\right)}$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{1494}}{(\sqrt{45})(\sqrt{62})}$$

$\theta \cong 47°$ OU $\theta \cong 180 - 47 = 133°$

En observant les vecteurs, on peut déterminer que $\theta \cong 47°$.

$\theta \cong 47°$



Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.