5.4 Leçon sur les vecteurs dans l'espace à trois dimensions avec solutions

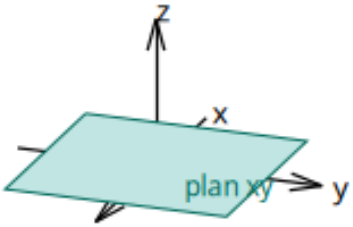
Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Placer des points en trois dimensions

www.geogebra.org/3d?lang=fr

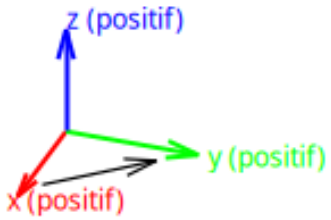
Pour placer des points en trois dimensions ($\mathbb{R}^3$), on choisit trois axes appelés axe des x, axe des y et axe des z. Chaque axe est perpendiculaire aux autres. Chaque point est écrit à l'aide d'un triplet ordonné (x, y, z).



Il existe plusieurs façons de choisir l'orientation des axes positifs, mais nous utiliserons ce qu'on appelle le système dextrogyre (ou « système orienté positivement »). Si on imagine regarder vers le bas le long de l'axe positif des z vers le plan xy, de sorte que l'axe positif des x, lorsqu'il est tourné de 90° dans le sens antihoraire, coïncide avec l'axe positif des y, alors on appelle cela le système dextrogyre.

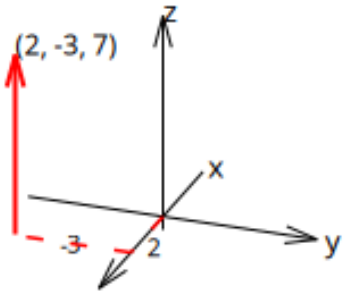
Si vous recourbez les doigts de votre main droite de l'axe positif des x vers l'axe positif des y, votre pouce pointera le long de l'axe positif des z.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



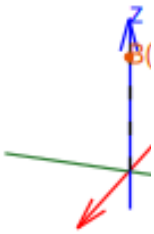
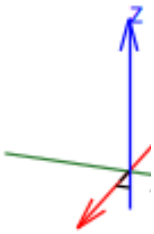
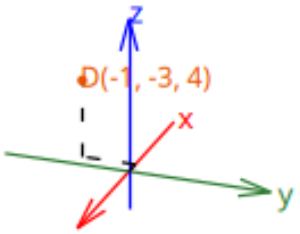
recourbez la main
droite de +x vers +y,
le pouce pointe vers +z

Pour placer le point (2, -3, 7), commencez à l'origine. Déplacez-vous de deux unités le long de l'axe positif des x, puis de 3 unités parallèlement à l'axe négatif des y, puis de 7 unités parallèlement à l'axe positif des z.



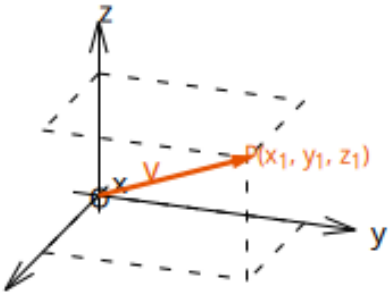
Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 1 : Placez les points suivants dans $\mathbb{R}^3$

a) $A(2,\ 6,\ 1)$	b) $B(0,\ 0,\ 6)$	c) $C(2,\ 3,\ 0)$	d) $D(-1,\ -3,\ 4)$
			

Partie 2 : Vecteurs cartésiens en trois dimensions

Soit $\vec{v}$ un vecteur dans l'espace. Si $\vec{v}$ est translaté de sorte que sa queue soit à l'origine, O, alors sa pointe sera à un point $P(x_1,\ y_1,\ z_1)$. Alors $\vec{v}$ est le vecteur de position du point P, et $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = [x_1,\ y_1,\ z_1]$.



Vecteurs unitaires dans $\mathbb{R}^3$

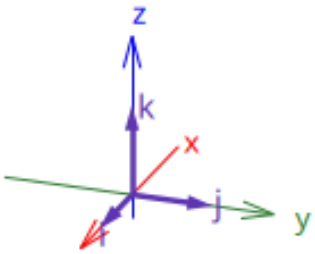
Les vecteurs unitaires ont tous une norme de 1 et se trouvent le long des axes. En trois dimensions, il y a 3 vecteurs unitaires :

l'axe des x est $\vec{i} = [1,\ 0,\ 0]$

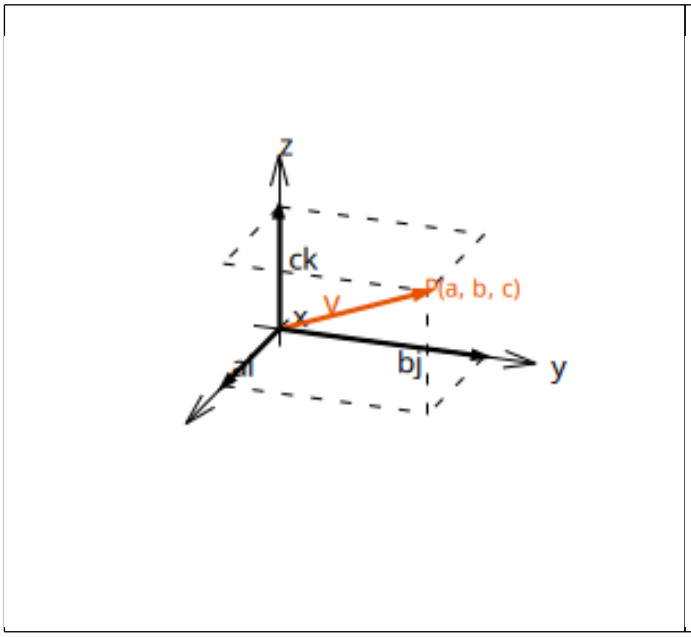
l'axe des y est $\vec{j} = [0,\ 1,\ 0]$

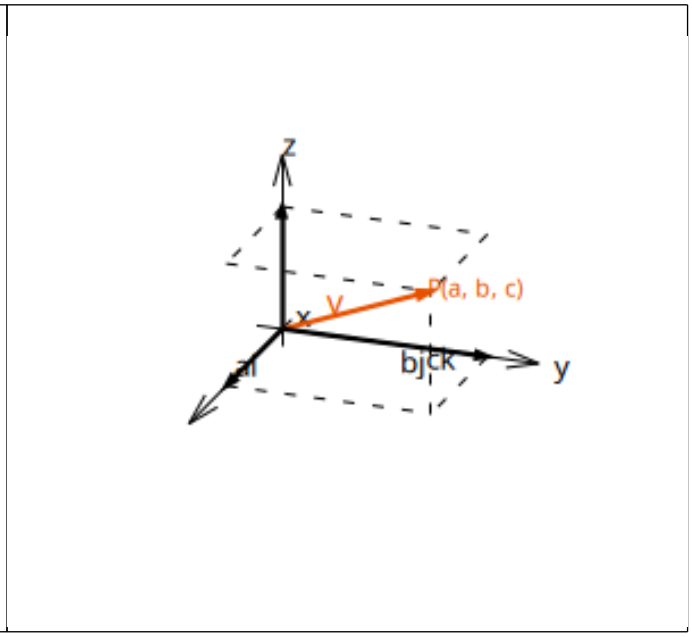
l'axe des z est $\vec{k} = [0,\ 0,\ 1]$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



Les vecteurs en trois dimensions peuvent être écrits comme la somme de multiples de $\vec{i}$, $\vec{j}$, et $\vec{k}$.

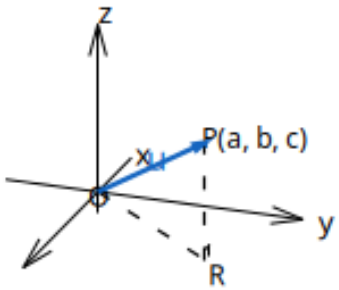




$\vec{v} = [a,\ b,\ c] = [a,\ 0,\ 0] + [0,\ b,\ 0] + [0,\ 0,\ c] = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Partie 3 : Norme des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$



$|\vec{u}|^2 = |\overrightarrow{OP}|^2$

$|\vec{u}|^2 = |\overrightarrow{OR}|^2 + |\overrightarrow{RP}|^2$

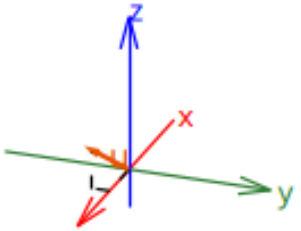
$|\vec{u}|^2 = (a^2 + b^2) + c^2$

$|\vec{u}|^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Exemple 2 : Pour $\vec{u} = [3, -1, 2]$…

a) esquissez le vecteur de position



b) écrivez le vecteur en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$, et $\vec{k}$

$\vec{u} = 3\vec{i} - 1\vec{j} + 2\vec{k}$

c) trouvez la norme

$|\vec{u}| = \sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (2)^2}$

$|\vec{u}| = \sqrt{14}$

Exemple 3 : Pour les points $A(1, 3, 1)$ et $B(5, 4, -2)$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 3 : Pour les points $A(1,\ 3,\ 1)$ et $B(5,\ 4,\ -2)$

a) Trouvez la norme de $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} = [5-1,\ 4-3,\ -2-1]$ $\overrightarrow{AB} = [4,\ 1,\ -3]$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(4)^2 + (1)^2 + (-3)^2}$ $\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{26}$	**Vecteur entre 2 points :** $\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1]$

b) Trouvez un vecteur unitaire, $\vec{u}$, dans la même direction que $\overrightarrow{AB}$

$\vec{u} = \frac{1}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}\overrightarrow{AB}$

$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{26}}[4,\ 1,\ -3]$

$\vec{u} = \left[\frac{4}{\sqrt{26}},\ \frac{1}{\sqrt{26}},\ \frac{-3}{\sqrt{26}}\right]$

Outils pour les vecteurs en 2D adaptés aux vecteurs en 3D :

Addition de vecteurs : $\vec{u} + \vec{v} = [u_x + v_x,\ u_y + v_y,\ u_z + v_z]$

Soustraction de vecteurs : $\vec{u} - \vec{v} = [u_x - v_x,\ u_y - v_y,\ u_z - v_z]$

Vecteur entre 2 points : $\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1]$

Norme d'un vecteur entre 2 points : $\lvert\overrightarrow{P_1P_2}\rvert = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Produit scalaire : pour $\vec{u} = [u_1,\ u_2,\ u_3]$ et $\vec{v} = [v_1,\ v_2,\ v_3]$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

Exemple 4 : Étant donné les vecteurs $\vec{u} = [2,\ 3,\ -5]$, $\vec{v} = [8,\ -4,\ 3]$, et $\vec{w} = [-6,\ -2,\ 0]$, simplifiez chaque expression vectorielle.

a) $-3\vec{v}$ $= -3[8,\ -4,\ 3]$ $= [-24,\ 12,\ -9]$	b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ $= [2,\ 3,\ -5] + [8,\ -4,\ 3] + [-6,\ -2,\ 0]$ $= [2 + 8 + (-6),\ 3 + (-4) + (-2),\ -5 + 3 + 0]$ $= [4,\ -3,\ -2]$
c) $\lvert\vec{u} - \vec{v}\rvert$ $\vec{u} - \vec{v} = [2,\ 3,\ -5] - [8,\ -4,\ 3]$ $\vec{u} - \vec{v} = [2 - 8,\ 3 - (-4),\ -5 - 3]$ $\vec{u} - \vec{v} = [-6,\ 7,\ -8]$ $\lvert\vec{u} - \vec{v}\rvert = \sqrt{(-6)^2 + (7)^2 + (-8)^2}$ $\lvert\vec{u} - \vec{v}\rvert = \sqrt{149}$	d) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ $= [2,\ 3,\ -5] \cdot [8,\ -4,\ 3]$ $= 2(8) + 3(-4) + (-5)(3)$ $= 16 - 12 - 15$ $= -11$

Exemple 5 : Déterminez si les vecteurs $\vec{a} = [6,\ 2,\ 4]$ et $\vec{b} = [9,\ 3,\ 6]$ sont colinéaires.

Vérifiez si $\vec{b}$ est un multiple scalaire de $\vec{a}$

$[6,\ 2,\ 4] = k[9,\ 3,\ 6]$

x : $6 = 9k$ $k = \frac{2}{3}$	y : $2 = 3k$ $k = \frac{2}{3}$	z : $4 = 6k$ $k = \frac{2}{3}$

Par conséquent, $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.

Exemple 6 : Trouvez a tel que $[1,\ 2,\ 3]$ et $[2,\ a,\ 6]$ soient colinéaires.

$[1,\ 2,\ 3] = k[2,\ a,\ 6]$

x : $1 = 2k$ $k = \frac{1}{2}$	y : $2 = ak$ $2 = a\left(\frac{1}{2}\right)$ $a = 4$	z : $3 = 6k$ $k = \frac{1}{2}$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 7 : Calculez l'angle entre $\vec{u} = [0, -1, -4]$ et $\vec{v} = [6, 1, -2]$

$\cos\theta = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\lvert\vec{u}\rVert\vec{v}\rvert}$ $\cos\theta = \frac{0(6) + (-1)(1) + (-4)(-2)}{\left[\sqrt{(0)^2 + (-1)^2 + (-4)^2}\right]\left[\sqrt{(6)^2 + (1)^2 + (-2)^2}\right]}$ $\cos\theta = \frac{7}{(\sqrt{17})(\sqrt{41})}$ $\theta \cong 74.6°$	**L'angle entre 2 vecteurs peut être trouvé à l'aide de :** $\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rVert\vec{b}\rvert}$

Exemple 8 : Trouvez un vecteur orthogonal à $[3, 4, 5]$

Si $[x, y, z]$ est orthogonal à $[3, 4, 5]$,

$[x, y, z] \cdot [3, 4, 5] = 0$

$3x + 4y + 5z = 0$

Un nombre infini de vecteurs satisferaient cette équation. Sélectionnez des valeurs pour deux variables, puis résolvez pour la troisième.

$3(2) + 4(1) + 5z = 0$

$5z = -10$

$z = -2$

$[2, 1, -2]$ est orthogonal à $[3, 4, 5]$

Raccourci :

Posez une variable égale à 0, puis échangez les deux autres et changez un signe.

Exemples : $[0, 5, -4]$, $[0, -5, 4]$, $[5, 0, -3]$, $[-5, 0, 3]$, $[-4, 3, 0]$, et $[4, -3, 0]$ seraient tous orthogonaux à $[3, 4, 5]$

Exemple 9 : Trouvez la norme de la projection de $\vec{u} = [3, -3, 2]$ sur $\vec{v} = [5, 2, 0]$

$\lvert proj_{\vec{v}}\,\vec{u}\rvert = \left\lvert \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\lvert\vec{v}\rvert} \right\rvert$ $\lvert proj_{\vec{v}}\,\vec{u}\rvert = \left\lvert \frac{3(5) + (-3)(2) + 2(0)}{\sqrt{5^2 + 2^2 + 0^2}} \right\rvert$ $\lvert proj_{\vec{v}}\,\vec{u}\rvert = \left\lvert \frac{9}{\sqrt{29}} \right\rvert$ $\lvert proj_{\vec{v}}\,\vec{u}\rvert = \frac{9}{\sqrt{29}} \cong 1.67$	**Rappel de la formule :** $\lvert proj_{\vec{b}}\,\vec{a}\rvert = \left\lvert \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{b}\rvert} \right\rvert$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.