5.4 Leçon sur les vecteurs dans l'espace à trois dimensions

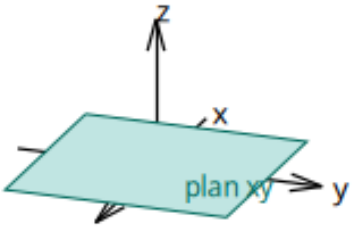
Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Placer des points en trois dimensions

www.geogebra.org/3d?lang=fr

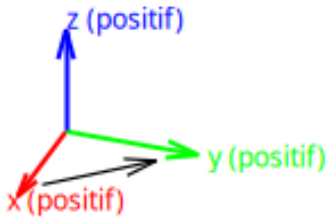
Pour placer des points en trois dimensions ($\mathbb{R}^3$), on choisit trois axes appelés axe des x, axe des y et axe des z. Chaque axe est perpendiculaire aux autres. Chaque point est écrit à l'aide d'un triplet ordonné (x, y, z).



Il existe plusieurs façons de choisir l'orientation des axes positifs, mais nous utiliserons ce qu'on appelle le système dextrogyre (ou « système orienté positivement »). Si on imagine regarder vers le bas le long de l'axe positif des z vers le plan xy, de sorte que l'axe positif des x, lorsqu'il est tourné de 90° dans le sens antihoraire, coïncide avec l'axe positif des y, alors on appelle cela le système dextrogyre.

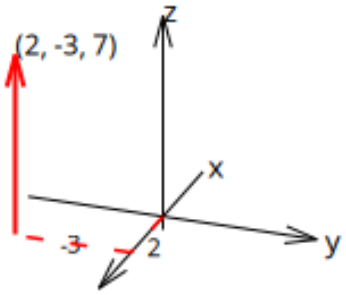
Si vous recourbez les doigts de votre main droite de l'axe positif des x vers l'axe positif des y, votre pouce pointera le long de l'axe positif des z.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



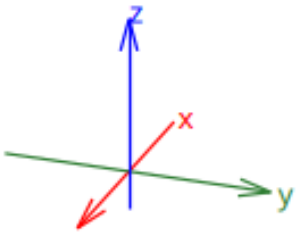
recourbez la main
droite de +x vers +y,
le pouce pointe vers +z

Pour placer le point (2, -3, 7), commencez à l'origine. Déplacez-vous de deux unités le long de l'axe positif des x, puis de 3 unités parallèlement à l'axe négatif des y, puis de 7 unités parallèlement à l'axe positif des z.



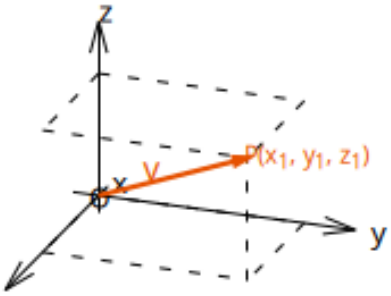
Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 1 : Placez les points suivants dans $\mathbb{R}^3$

a) $A(2,\ 6,\ 1)$	b) $B(0,\ 0,\ 6)$	c) $C(2,\ 3,\ 0)$	d) $D(-1,\ -3,\ 4)$
			

Partie 2 : Vecteurs cartésiens en trois dimensions

Soit $\vec{v}$ un vecteur dans l'espace. Si $\vec{v}$ est translaté de sorte que sa queue soit à l'origine, O, alors sa pointe sera à un point $P(x_1,\ y_1,\ z_1)$. Alors $\vec{v}$ est le vecteur de position du point P, et $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = [x_1,\ y_1,\ z_1]$.



Vecteurs unitaires dans $\mathbb{R}^3$

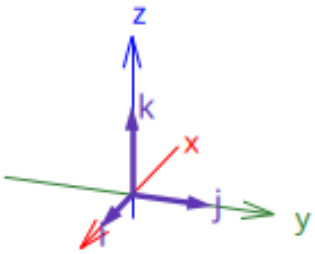
Les vecteurs unitaires ont tous une norme de 1 et se trouvent le long des axes. En trois dimensions, il y a 3 vecteurs unitaires :

l'axe des x est $\vec{i} = [1,\ 0,\ 0]$

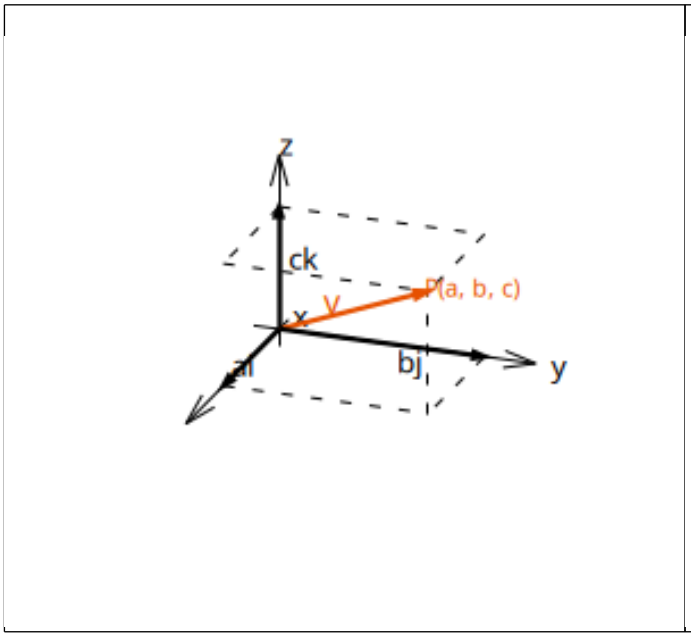
l'axe des y est $\vec{j} = [0,\ 1,\ 0]$

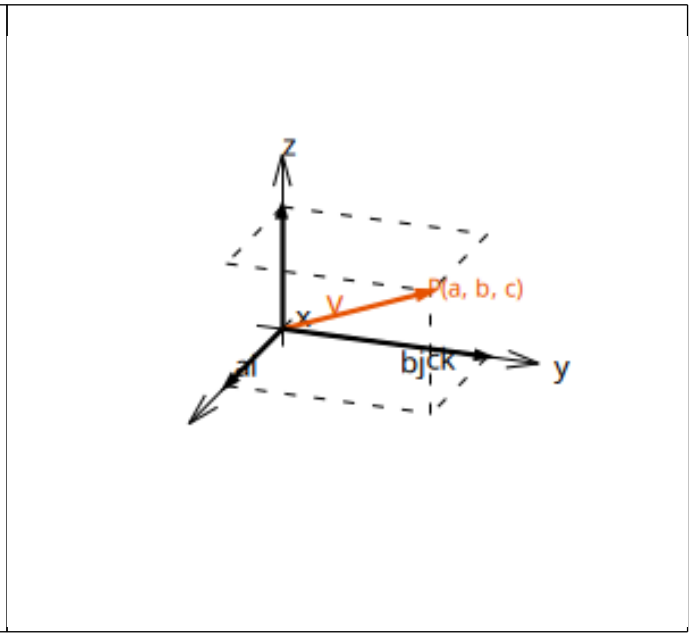
l'axe des z est $\vec{k} = [0,\ 0,\ 1]$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



Les vecteurs en trois dimensions peuvent être écrits comme la somme de multiples de $\vec{i}$, $\vec{j}$, et $\vec{k}$.

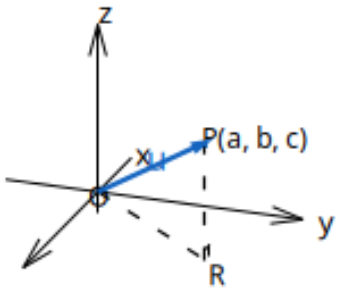




$\vec{v} = [a,\ b,\ c] = [a,\ 0,\ 0] + [0,\ b,\ 0] + [0,\ 0,\ c] = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$

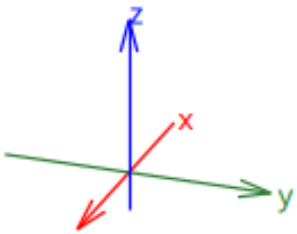
Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Partie 3 : Norme des vecteurs dans $\mathbb{R}^3$



Exemple 2 : Pour $\vec{u} = [3, -1, 2]$…

a) esquissez le vecteur de position



b) écrivez le vecteur en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$, et $\vec{k}$

c) trouvez la norme

Exemple 3 : Pour les points $A(1, 3, 1)$ et $B(5, 4, -2)$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 3 : Pour les points $A(1,\ 3,\ 1)$ et $B(5,\ 4,\ -2)$

a) Trouvez la norme de $\overrightarrow{AB}$

	Vecteur entre 2 points : $\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1]$

b) Trouvez un vecteur unitaire, $\vec{u}$, dans la même direction que $\overrightarrow{AB}$

Outils pour les vecteurs en 2D adaptés aux vecteurs en 3D :

Addition de vecteurs : $\vec{u} + \vec{v} = [u_x + v_x,\ u_y + v_y,\ u_z + v_z]$

Soustraction de vecteurs : $\vec{u} - \vec{v} = [u_x - v_x,\ u_y - v_y,\ u_z - v_z]$

Vecteur entre 2 points : $\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1]$

Norme d'un vecteur entre 2 points : $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Produit scalaire : pour $\vec{u} = [u_1,\ u_2,\ u_3]$ et $\vec{v} = [v_1,\ v_2,\ v_3]$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

Exemple 4 : Étant donné les vecteurs $\vec{u} = [2,\ 3,\ -5]$, $\vec{v} = [8,\ -4,\ 3]$, et $\vec{w} = [-6,\ -2,\ 0]$, simplifiez chaque expression vectorielle.

a) $-3\vec{v}$	b) $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
c) $\lvert\vec{u} - \vec{v}\rvert$	d) $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Exemple 5 : Déterminez si les vecteurs $\vec{a} = [6,\ 2,\ 4]$ et $\vec{b} = [9,\ 3,\ 6]$ sont colinéaires.

Exemple 6 : Trouvez a tel que $[1,\ 2,\ 3]$ et $[2,\ a,\ 6]$ soient colinéaires.

Exemple 7 : Calculez l'angle entre $\vec{u} = [0,\ -1,\ -4]$ et $\vec{v} = [6,\ 1,\ -2]$

	L'angle entre 2 vecteurs peut être trouvé à l'aide de : $\cos\theta = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rVert\vec{b}\rvert}$

Exemple 8 : Trouvez un vecteur orthogonal à $[3,\ 4,\ 5]$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 9 : Trouvez la norme de la projection de $\vec{u} = [3, -3, 2]$ sur $\vec{v} = [5, 2, 0]$

	Rappel de la formule : $\lvert proj_{\vec{b}} \vec{a} \rvert = \lvert \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert \vec{b} \rvert} \rvert$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.