5.3 Leçon sur les applications du produit scalaire avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Échauffement

Exemple 1 : Un bureau est poussé avec une force de 50 N à un angle de 45 degrés sous l'horizontale. Si le bureau est poussé sur 5 mètres, quel est le travail effectué?

$W = \vec{f} \cdot \vec{s}$ $W = \lvert\vec{f}\rVert\vec{s}\rvert\cos\theta$ $W = 50(5)\cos 45$ $W = 250\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $W = \frac{250}{\sqrt{2}}$ ou $125\sqrt{2}$ joules	**Rappel :** Le travail mécanique est le produit de la norme du déplacement parcouru par un objet et de la norme de la force appliquée dans la direction du mouvement.

Partie 1 : Angle entre 2 vecteurs

Pour déterminer l'angle entre deux vecteurs, vous pouvez réarranger la formule du produit scalaire, $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert\vec{a}\rVert\vec{b}\rvert\cos\theta$, afin d'isoler $\cos\theta$:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rVert\vec{b}\rvert}$$

Exemple 2 : Déterminez l'angle entre chaque paire de vecteurs.

a) $\vec{g} = [5, 1]$ et $\vec{h} = [-3, 8]$	b) $\vec{a} = [-3, 6]$ et $\vec{b} = [4, 2]$
$\cos\theta = \frac{\vec{g} \cdot \vec{h}}{\lvert\vec{g}\rVert\vec{h}\rvert}$ $\cos\theta = \frac{5(-3) + 1(8)}{\left(\sqrt{(5)^2 + (1)^2}\right)\left(\sqrt{(-3)^2 + (8)^2}\right)}$ $\cos\theta = \frac{-7}{(\sqrt{26})(\sqrt{73})}$ $\theta \cong 99.2°$	$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rVert\vec{b}\rvert}$ $\cos\theta = \frac{(-3)(4) + 6(2)}{\left(\sqrt{(-3)^2 + (6)^2}\right)\left(\sqrt{(4)^2 + (2)^2}\right)}$ $\cos\theta = \frac{0}{(\sqrt{45})(\sqrt{20})}$ $\theta = 90°$

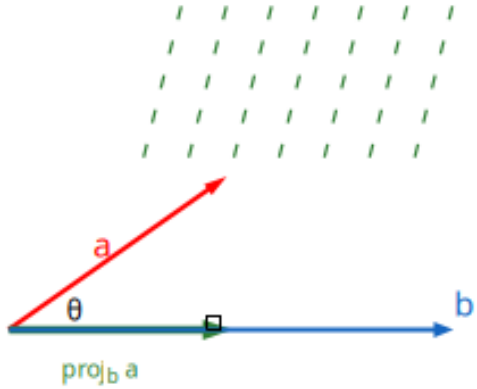
Partie 2 : Projections de vecteurs

Vous pouvez penser à une projection de vecteur comme à une ombre. Les flèches verticales dans les diagrammes représentent la lumière venant d'en haut.

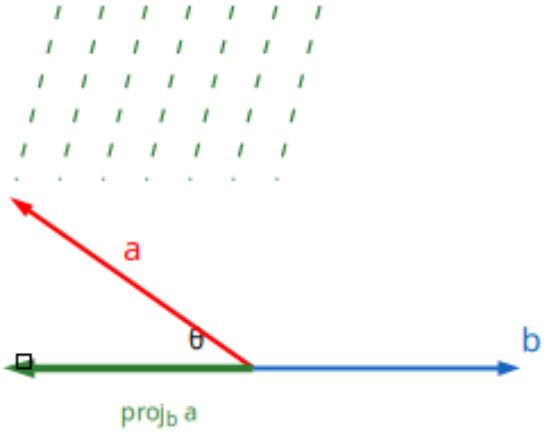
Pensez à la projection de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$ comme à l'ombre que $\vec{a}$ projette sur $\vec{b}$.

Si l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est inférieur à 90°, alors la projection de $\vec{a}$ sur $\vec{b}$, ou $proj_{\vec{b}}\,\vec{a}$, est la composante vectorielle de $\vec{a}$ dans la direction de $\vec{b}$.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

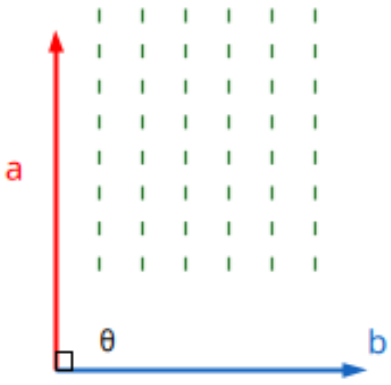


Si l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ est compris entre 90° et 180°, la direction de $proj_{\vec{b}}\,\vec{a}$ est dans la direction opposée à $\vec{b}$.



Si $\vec{a}$ est perpendiculaire à $\vec{b}$, alors $\vec{a}$ ne projette « aucune ombre » sur $\vec{b}$. Donc si $\theta = 90°$, $proj_{\vec{b}}\,\vec{a} = 0$.

Remarque : c'est pourquoi le produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b}$ serait nul pour des vecteurs perpendiculaires.



Formules pour la projection de vecteurs :

Formules géométriques : $proj_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta\,(\hat{b})$ OU $proj_{\vec{b}}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cos\theta\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$

Formules cartésiennes : $proj_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}(\hat{b})$ OU $proj_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ OU $proj_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}(\vec{b})$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Formules pour la norme de la projection d'un vecteur :

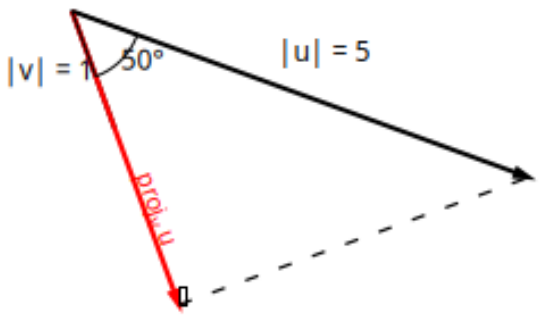
Si $0° < \theta < 90°$: $|proj_{\vec{b}}\,\vec{a}| = |\vec{a}|\cos\theta$ OU $|proj_{\vec{b}}\,\vec{a}| = \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|$

Si $90° < \theta < 180°$: $|proj_{\vec{b}}\,\vec{a}| = -|\vec{a}|\cos\theta$

Remarque : $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ *est un vecteur unitaire dans la direction de* $\vec{b}$. *On utilise parfois le symbole* $\hat{b}$ *pour désigner un vecteur unitaire dans la direction de* $\vec{b}$.

Exemple 3 : Déterminez les projections suivantes d'un vecteur sur un autre.

a) Déterminez la projection de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$



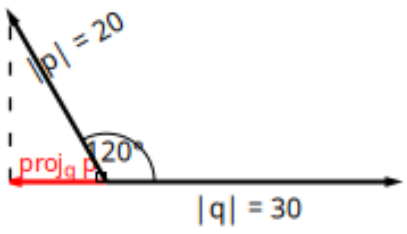
$proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = |\vec{u}|\cos\theta(\hat{v})$

$proj_{\vec{v}}\,\vec{u} = 5\cos 50(\hat{v})$

$proj_{\vec{v}}\,\vec{u} \cong 3.2\hat{v}$

3.2 unités dans la même direction que $\vec{v}$

b) Déterminez $proj_{\vec{q}}\,\vec{p}$



$proj_{\vec{q}}\,\vec{p} = |\vec{p}|\cos\theta(\hat{q})$

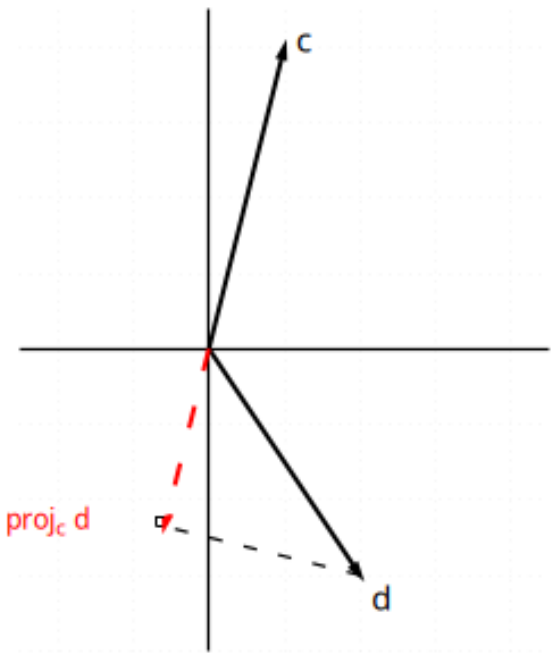
$proj_{\vec{q}}\,\vec{p} = 20\cos 120(\hat{q})$

$proj_{\vec{q}}\,\vec{p} \cong -10\hat{q}$

10 unités dans la direction opposée à $\vec{q}$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

c) Déterminez la projection de $\vec{d} = [2, \ -3]$ sur $\vec{c} = [1, \ 4]$

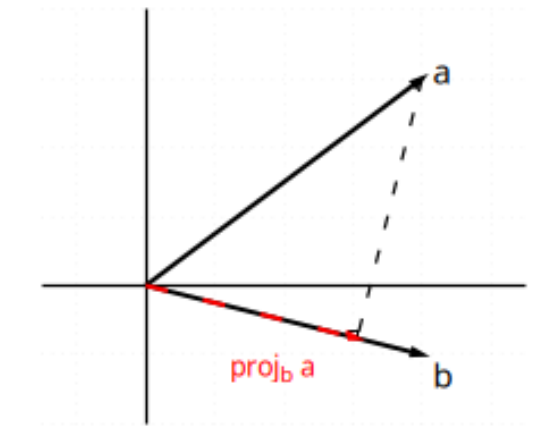


$$proj_{\vec{c}}\,\vec{d} = \frac{\vec{d}\cdot\vec{c}}{\vec{c}\cdot\vec{c}}(\vec{c})$$
$$proj_{\vec{c}}\,\vec{d} = \left(\frac{2(1)+(-3)(4)}{1^2+4^2}\right)[1, \ 4]$$
$$proj_{\vec{c}}\,\vec{d} = \left(\frac{-10}{17}\right)[1, \ 4]$$
$$proj_{\vec{c}}\,\vec{d} = \left[\frac{-10}{17}, \ \frac{-40}{17}\right]$$

d) Trouvez la norme de la projection de $\vec{a} = [4, \ 3]$ sur $\vec{b} = [4, \ -1]$

$$|proj_{\vec{b}}\,\vec{a}| = \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\right|$$
$$|proj_{\vec{b}}\,\vec{a}| = \left|\frac{4(4)+(3)(-1)}{\sqrt{(4)^2+(-1)^2}}\right|$$
$$|proj_{\vec{b}}\,\vec{a}| = \frac{13}{\sqrt{17}}$$

e) Trouvez la projection de $\vec{a} = [4, \ 3]$ sur $\vec{b} = [4, \ -1]$



$$proj_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}(\vec{b})$$
$$proj_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{4(4)+(3)(-1)}{(4)^2+(-1)^2}[4, \ -1]$$
$$proj_{\vec{b}}\,\vec{a} = \frac{13}{17}[4, \ -1]$$
$$proj_{\vec{b}}\,\vec{a} = \left[\frac{52}{17}, \ \frac{-13}{17}\right]$$

Partie 3 : Produit scalaire et ventes

Exemple 4 : Un magasin de chaussures a vendu 350 paires de chaussures Nike et 275 paires de chaussures Adidas

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

en une année. Les chaussures Nike se vendent 175 $ et les chaussures Adidas se vendent 250 $.

a) Écrivez un vecteur cartésien, $\vec{s}$, pour représenter les nombres de paires de chaussures vendues.

$\vec{s} = [350,\ 275]$

b) Écrivez un vecteur cartésien, $\vec{p}$, pour représenter les prix des chaussures.

$\vec{p} = [175,\ 250]$

c) Trouvez le produit scalaire $\vec{s} \cdot \vec{p}$. Que représente ce produit scalaire?

$\vec{s} \cdot \vec{p} = 350(175) + 275(250)$

$\vec{s} \cdot \vec{p} = 130\,000$

Le produit scalaire représente le revenu, 130 000 $, provenant de la vente des chaussures.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.