5.2 Leçon sur le produit scalaire avec solutions

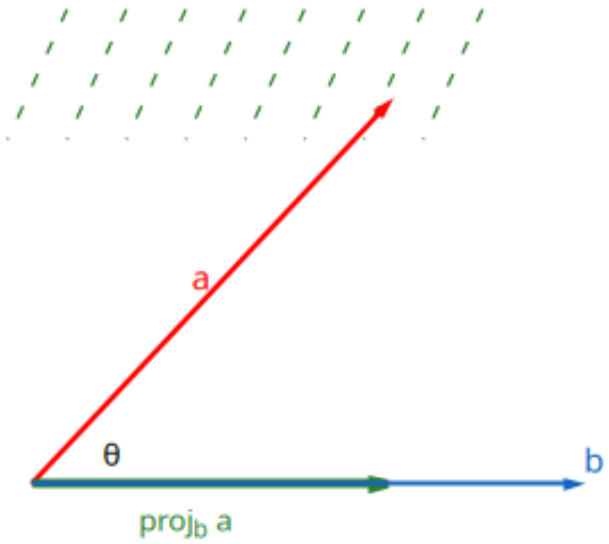
Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Produit scalaire de vecteurs géométriques

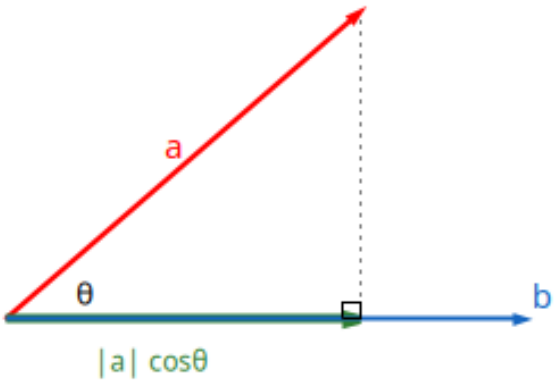
Le produit scalaire de deux vecteurs est le produit de la norme d'un vecteur, le vecteur $\vec{b}$, avec la norme de l'autre vecteur, $\vec{a}$, appliquée dans la même direction que $\vec{b}$. Pour déterminer la norme de $\vec{a}$ qui est appliquée dans la même direction que $\vec{b}$, nous pouvons considérer la projection du vecteur $\vec{a}$ sur le vecteur $\vec{b}$ $(proj_{\vec{b}}\,\vec{a})$.

Autrement dit, le produit scalaire $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}||proj_{\vec{b}}\,\vec{a}|$



Remarque : $\cos\theta = \frac{|proj_{\vec{b}}\,\vec{a}|}{|\vec{a}|}$, donc $|proj_{\vec{b}}\,\vec{a}| = |\vec{a}|\cos\theta$

De ceci, le produit scalaire $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$



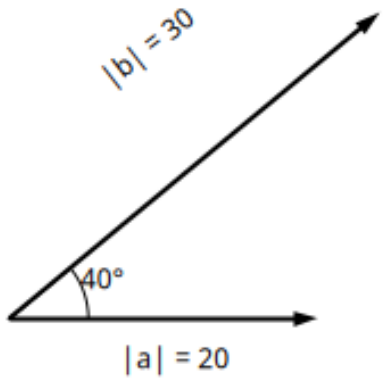
Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Le produit scalaire :

Pour deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, le produit scalaire est défini comme $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, où θ est l'angle entre $\vec{a}$ et $\vec{b}$ lorsque les vecteurs sont placés origine à origine, et $0 \leq \theta \leq 180°$. Le produit scalaire est un scalaire, et non un vecteur, et les unités dépendent de l'application.

Exemple 1 : Détermine le produit scalaire de chaque paire de vecteurs.

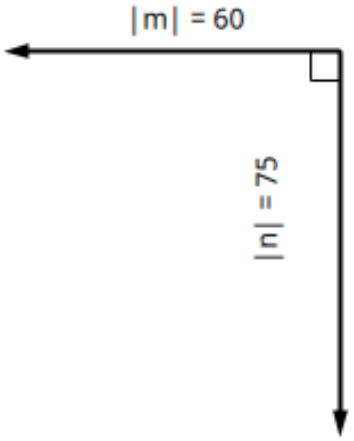
a)



$\vec{a} \cdot \vec{b} = (30)(20)\cos 40$

$\vec{a} \cdot \vec{b} \cong 459.6$

b)

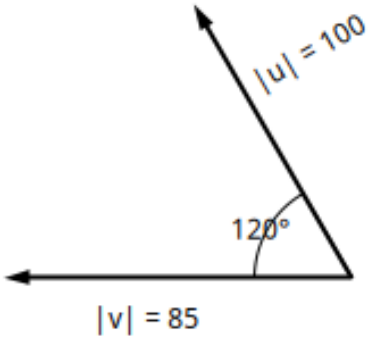


$\vec{m} \cdot \vec{n} = (60)(75)\cos 90$

$\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

c)



$\vec{u} \cdot \vec{v} = (85)(100)\cos 120$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -4250$

Propriétés du produit scalaire

- Pour des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$. C'est la propriété commutative.
- Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un scalaire $k \in \mathbb{R}$, $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = k(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot (k\vec{v})$. C'est la propriété associative du produit scalaire.
- Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, et $\vec{w}$, $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$. C'est la propriété distributive du produit scalaire.

Selon l'angle θ, nous pouvons prédire si notre réponse sera +, -, ou 0 :

Si $\theta < 90°$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0$

Si $\theta > 90°$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$

Si $\theta = 90°$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Partie 2 : Produit scalaire de vecteurs cartésiens

Le produit scalaire de deux vecteurs cartésiens $\vec{a} = [a_x, a_y]$ et $\vec{b} = [b_x, b_y]$ est $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y$

Exemple 2 : Calcule $\vec{u} \cdot \vec{v}$

a) $\vec{u} = [5, -3]$, $\vec{v} = [4, 7]$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5(4) + (-3)(7)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$

b) $\vec{u} = [-2, 9]$, $\vec{v} = [-1, 0]$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2)(-1) + (9)(0)$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$

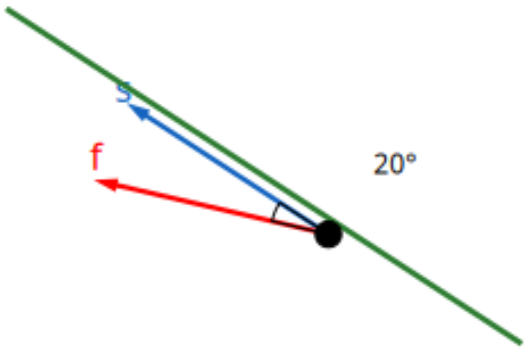
Partie 3 : Travail mécanique

Une des applications du produit scalaire est de calculer le travail mécanique (ou simplement le travail) effectué. Le travail mécanique est le produit de la norme du déplacement parcouru par un objet et de la norme de la force

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

appliquée dans la direction du mouvement. Les unités sont les newton-mètres ($N \cdot m$), aussi connus sous le nom de joules (J).

Exemple 3 : Max tire sa voiturette de golf en haut d'une colline avec une force de 120 N à un angle de 20° par rapport à la surface de la colline. Cette colline mesure 100 mètres de long. Trouve le travail que Max effectue.



Soit $\vec{f}$ qui représente la force

Soit $\vec{s}$ qui représente le déplacement le long de la colline

Le travail effectué équivaut à $\vec{f} \cdot \vec{s}$

$W = (120)(100)\cos 20$

$W \cong 11\,276.3$ joules

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.