5.1 Leçon sur les vecteurs cartésiens avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

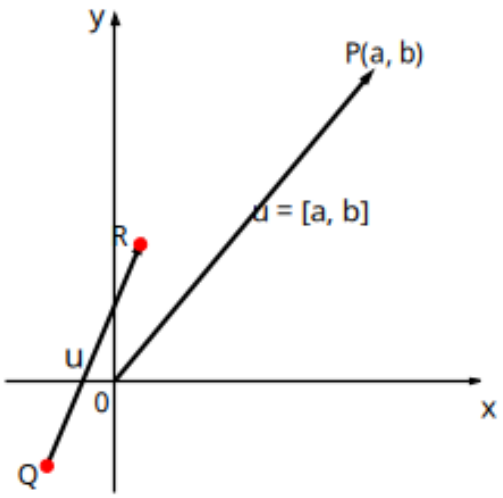
Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Les mathématiciens ont commencé à utiliser les coordonnées pour analyser des situations physiques vers le quatorzième siècle. Cependant, le mathématicien français René Descartes (1596-1650) mérite une grande partie du crédit pour avoir développé les méthodes utilisées avec les systèmes de coordonnées. Descartes fut le premier à réaliser qu'un système de coordonnées permettrait d'utiliser l'algèbre en géométrie. Depuis, cette idée est devenue importante dans le développement des idées mathématiques dans plusieurs domaines. Pour nos besoins, utiliser l'algèbre de cette façon nous mène à considérer des idées impliquant des vecteurs qui ne seraient autrement pas possibles.

Partie 1 : Que sont les vecteurs cartésiens (algébriques)?

Supposons que $\vec{u}$ est un vecteur quelconque avec les extrémités Q et R. Nous identifions $\overrightarrow{QR}$ comme un vecteur cartésien car ses extrémités peuvent être définies à l'aide de coordonnées cartésiennes.

Si nous translatons $\vec{u}$ de sorte que son origine soit à l'origine, O, alors son extrémité se trouvera à un point $P(a,\ b)$. Nous définissons alors ce vecteur cartésien comme le vecteur de position $[a,\ b]$.



Remarque : Utilise des crochets pour distinguer un point $(a,\ b)$ d'un vecteur de position $[a,\ b]$

Partie 2 : Décomposer les vecteurs cartésiens en vecteurs unitaires

Une deuxième façon d'écrire $\overrightarrow{OP} = [a,\ b]$ est à l'aide des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

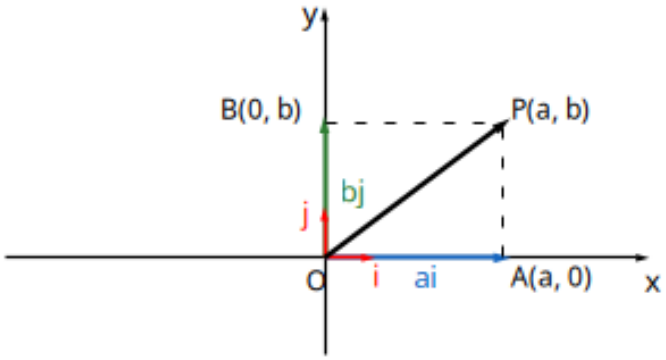
$\vec{i} = [1,\ 0]$ et $\vec{j} = [0,\ 1]$

Ces deux vecteurs ont une norme de 1 et se trouvent le long des axes x et y positifs respectivement.

Dans le diagramme, $\overrightarrow{OA} = [a,\ 0] = a\vec{i}$

$\overrightarrow{OB} = [0,\ b] = b\vec{j}$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



Par conséquent, en utilisant la loi du triangle pour l'addition, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = a\vec{i} + b\vec{j}$

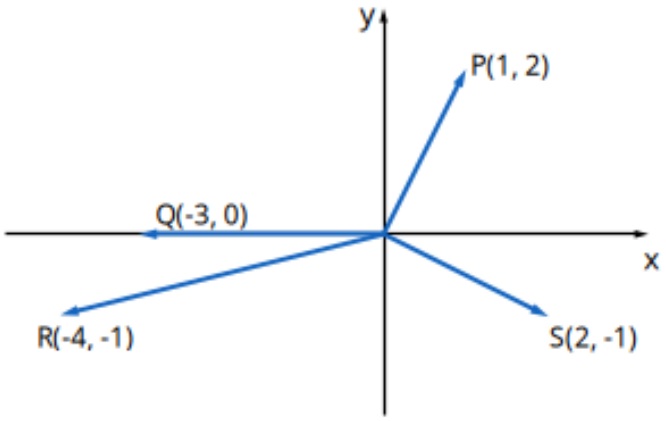
Il s'ensuit que $[a,\ b] = a\vec{i} + b\vec{j}$

Représentations des vecteurs dans $\mathbb{R}^2$

Le vecteur de position $\overrightarrow{OP}$ peut être représenté soit par $\overrightarrow{OP} = [a,\ b]$ soit par $\overrightarrow{OP} = a\vec{i} + b\vec{j}$ où $O(0,\ 0)$ est l'origine et $P(a,\ b)$ est un point quelconque du plan.

Exemple 1 : Pratique à représenter des vecteurs sous deux formes équivalentes.

a) Quatre vecteurs de position, $\overrightarrow{OP} = [1,\ 2]$, $\overrightarrow{OQ} = [-3,\ 0]$, $\overrightarrow{OR} = [-4,\ -1]$, et $\overrightarrow{OS} = [2,\ -1]$ sont illustrés. Écris chacun de ces vecteurs à l'aide des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$.



$\overrightarrow{OP} = \vec{i} + 2\vec{j}$ $\overrightarrow{OQ} = -3\vec{i}$

$\overrightarrow{OR} = -4\vec{i} - \vec{j}$ $\overrightarrow{OS} = 2\vec{i} - \vec{j}$

b) Les vecteurs $\overrightarrow{OA} = -\vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{i} + 5\vec{j}$, et $\overrightarrow{OC} = -5\vec{i} + 2\vec{j}$ ont été écrits à l'aide des vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$. Écris-les sous forme de composantes $[a,\ b]$.

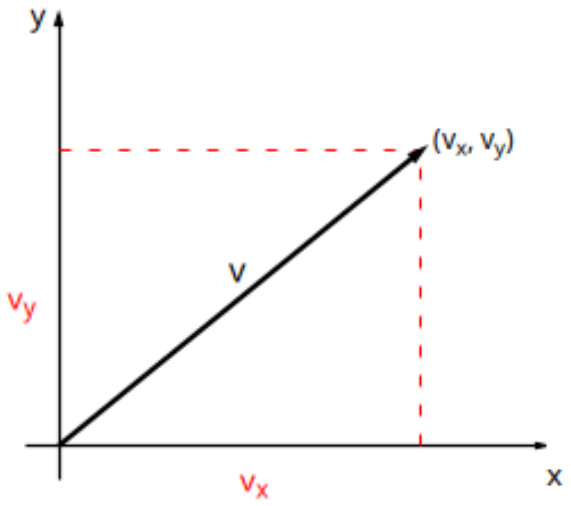
$\overrightarrow{OA} = [-1,\ 0]$ $\overrightarrow{OB} = [1,\ 5]$ $\overrightarrow{OC} = [-5,\ 2]$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

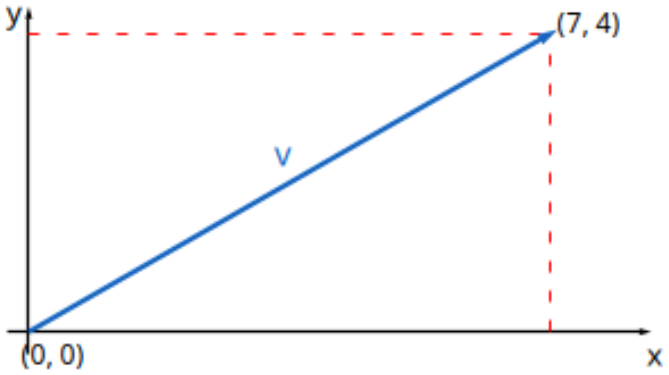
Partie 3 : Norme des vecteurs

Tout vecteur cartésien $\vec{v} = [v_x, v_y]$ peut être translaté de sorte que son origine soit à $(0, 0)$, et son extrémité au point (v_x, v_y). Pour trouver la norme du vecteur, utilise la formule de la distance entre deux points :

$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_x - 0)^2 + (v_y - 0)^2}$$
$$|\vec{v}| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$



Exemple 2 : Trouve la norme du vecteur $\vec{v} = [7, 4]$



$|\vec{v}| = \sqrt{(7)^2 + (4)^2}$

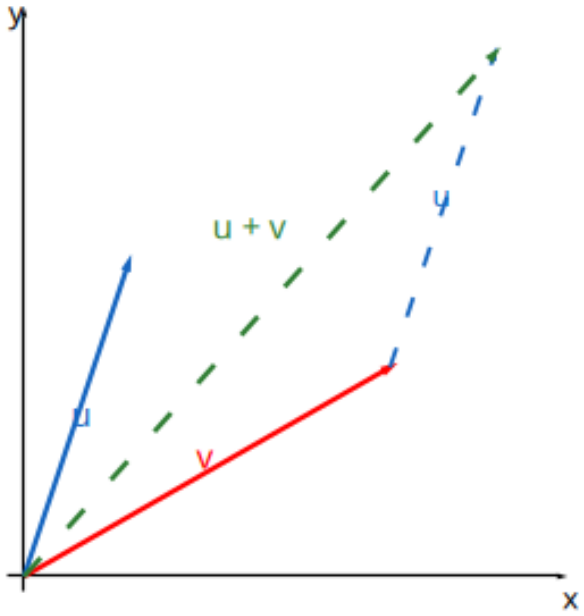
$|\vec{v}| = \sqrt{65}$

Partie 4 : Addition et soustraction de vecteurs

Règle : $\vec{v} + \vec{u} = [v_x + u_x, v_y + u_y]$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 3 : Si $\vec{v} = [7, 4]$ et $\vec{u} = [2, 6]$. Trouve $\vec{v} + \vec{u}$.

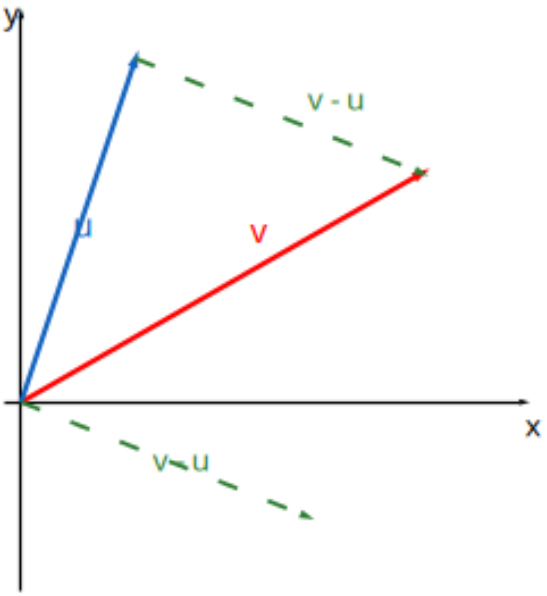


$\vec{v} + \vec{u} = [7 + 2, 4 + 6]$

$\vec{v} + \vec{u} = [9, 10]$

Règle : $\vec{v} - \vec{u} = [v_x - u_x, v_y - u_y]$

Exemple 4 : Si $\vec{v} = [7, 4]$ et $\vec{u} = [2, 6]$. Trouve $\vec{v} - \vec{u}$.



$\vec{v} - \vec{u} = [7 - 2, 4 - 6]$

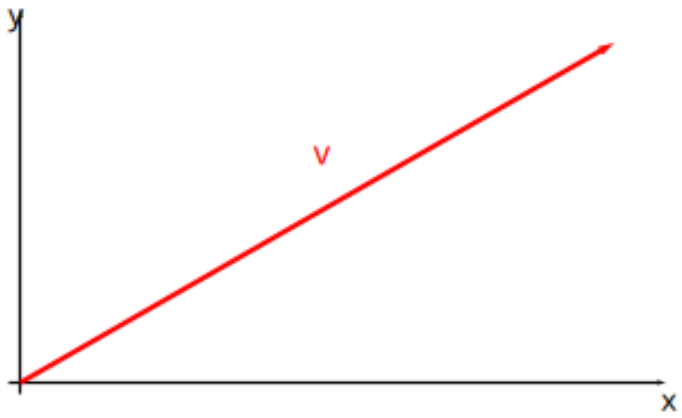
$\vec{v} - \vec{u} = [5, -2]$

Partie 5 : Multiplier un vecteur par un scalaire

Pour $\vec{v} = [v_x, v_y]$, $k\vec{v} = [kv_x, kv_y]$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 5 : Si $\vec{v} = [7, 4]$, trouve $2\vec{v}$.



$2\vec{v} = [2(7), 2(4)]$

$2\vec{v} = [14, 8]$

Rappel : Deux vecteurs qui sont **colinéaires** peuvent être tracés de sorte qu'ils se trouvent sur la même droite. Autrement dit, ils sont des multiples scalaires l'un de l'autre.

Si $\vec{u} = k\vec{v}$ alors $\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y}$

Exemple 6 : Les vecteurs $\vec{u} = \left[3, \frac{5}{6}\right]$ et $\vec{v} = \left[\frac{-3}{2}, \frac{-5}{12}\right]$ sont-ils colinéaires?

$\frac{u_x}{v_x} = \frac{u_y}{v_y}$

$\frac{3}{\left(\frac{-3}{2}\right)} = \frac{\left(\frac{5}{6}\right)}{\left(\frac{-5}{12}\right)}$

$\frac{6}{-3} = \frac{60}{-30}$

$-2 = -2$

$\vec{u} = -2\vec{v}$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

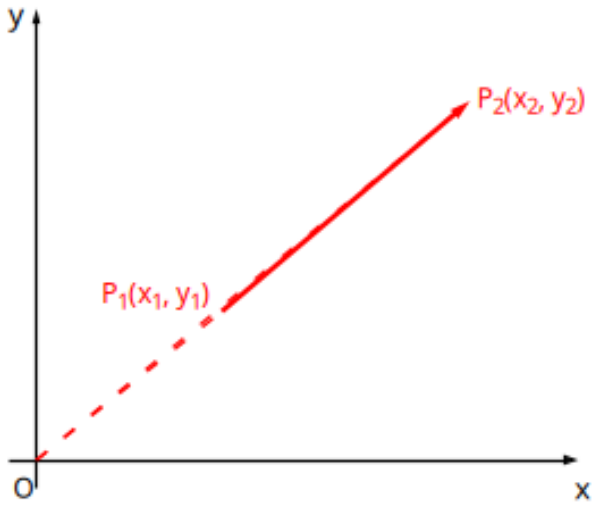
Partie 6 : Vecteur cartésien entre 2 points

Remarque que $\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1}$

Donc, $\overrightarrow{P_1P_2} = [x_2 - x_1, y_2 - y_1]$

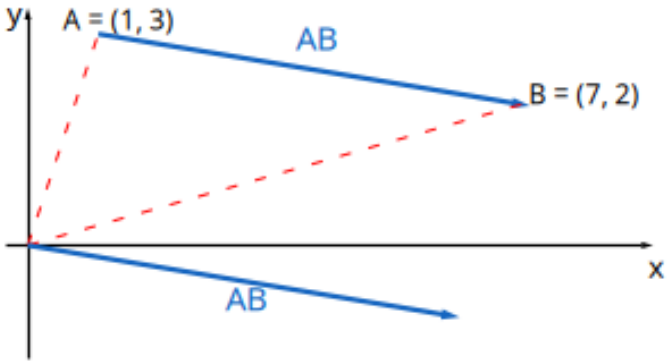
Ou, $\overrightarrow{P_1P_2} = [x_{bout} - x_{origine}, y_{bout} - y_{origine}]$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



Exemple 7 : Trouve les coordonnées et la norme de chaque vecteur.

a) $\overrightarrow{AB}$, pour $A(1,\ 3)$ et $B(7,\ 2)$



$\overrightarrow{AB} = [7 - 1,\ 2 - 3]$

$\overrightarrow{AB} = [6,\ -1]$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(6)^2 + (-1)^2}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{37}$

b) $\overrightarrow{CD}$, pour $C(-10,\ 0)$ et $D(0,\ 10)$

$\overrightarrow{CD} = [0 - (-10),\ 10 - 0]$

$\overrightarrow{CD} = [10,\ 10]$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{(10)^2 + (10)^2}$

$|\overrightarrow{CD}| = \sqrt{200}$

$|\overrightarrow{CD}| = 10\sqrt{2}$

c) $\overrightarrow{EF}$, pour $E(4,\ -3)$ et $F(1,\ -7)$

$\overrightarrow{EF} = [1 - 4,\ -7 - (-3)]$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$\overrightarrow{EF} = [-3,\ -4]$

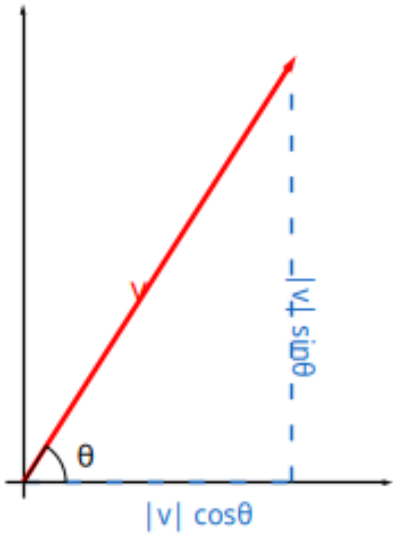
$|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$

$|\overrightarrow{EF}| = \sqrt{25}$

$|\overrightarrow{EF}| = 5$

Partie 7 : Vecteurs géométriques sous forme cartésienne

Pour écrire un vecteur géométrique $\vec{v}$ sous forme cartésienne, tu dois utiliser la trigonométrie. Dans l'unité précédente, nous avons trouvé que la norme de la composante horizontale est $|\vec{v}|\cos\theta$, et la norme de la composante verticale est $|\vec{v}|\sin\theta$, où θ est l'angle que $\vec{v}$ fait avec l'horizontale, ou l'axe des x positif.



Exemple 8 : Écris une force de 200 N à 20° de l'horizontale sous forme cartésienne.

$\vec{F} = [|\vec{F}|\cos\theta,\ |\vec{F}|\sin\theta]$

$\vec{F} = [200\cos 20,\ 200\sin 20]$

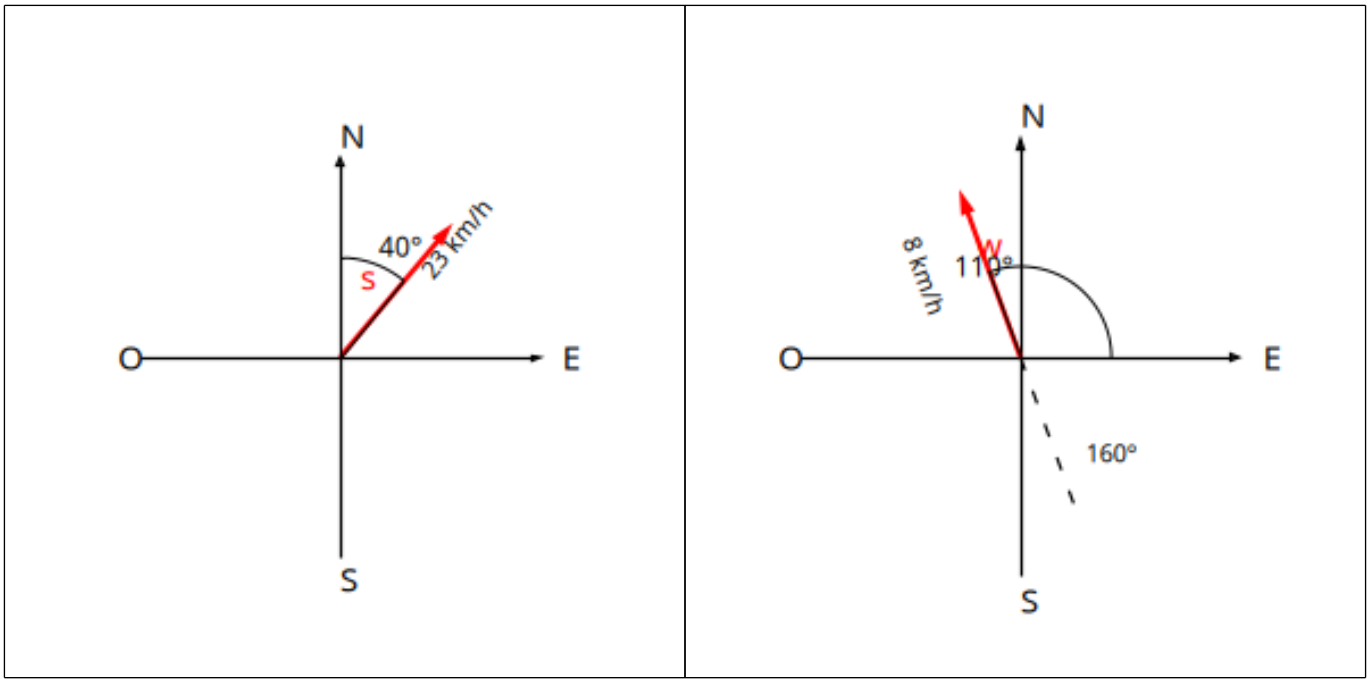
$\vec{F} \cong [187.9,\ 68.4]$

Exemple 9 : Un navire doit voyager à 23 km/h, par rapport à l'eau, sur un cap de 040°. Un courant de 8 km/h provient d'un relèvement de 160°.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 9 : Un navire doit voyager à 23 km/h, par rapport à l'eau, sur un cap de 040°. Un courant de 8 km/h provient d'un relèvement de 160°.

a) Écris chaque vecteur sous forme cartésienne (algébrique).



$\vec{s} = [23\cos 50,\ 23\sin 50]$

$\vec{w} = [8\cos 110,\ 8\sin 110]$

b) Détermine la vitesse résultante du navire.

$\vec{r} = \vec{s} + \vec{w}$

$\vec{r} = [23\cos 50 + 8\cos 110,\ \ 23\sin 50 + 8\sin 110]$

$\vec{r} \cong [12.048,\ 25.137]$

Norme :

$|\vec{r}| \cong \sqrt{(12.048)^2 + (25.137)^2}$

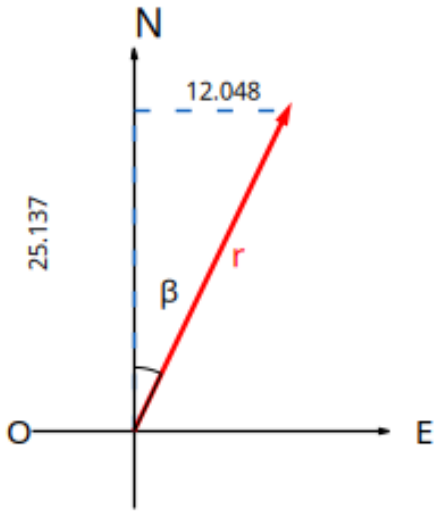
$|\vec{r}| \cong 27.875$

Direction :

$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{12.048}{25.137}\right)$

$\beta \cong 25.6°$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



Le navire voyage à une vitesse d'environ 27.875 km/h sur un relèvement de 025.6°.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.