4.3 Leçon sur la multiplication d'un vecteur par un scalaire avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

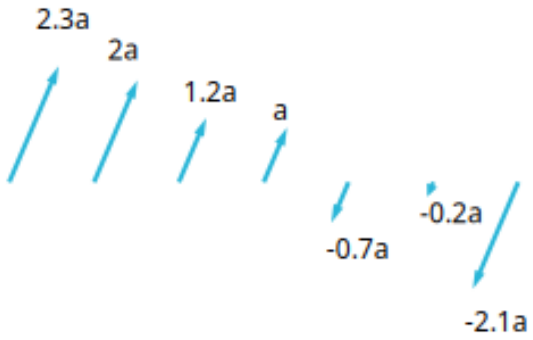
Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Multiplication par un scalaire

Dans cette section, nous allons multiplier un vecteur, $\vec{a}$, par un nombre k pour produire un nouveau vecteur $k\vec{a}$. Le nombre k utilisé pour la multiplication est appelé un SCALAIRE et peut être n'importe quel nombre réel.

Multiplier un vecteur par différentes valeurs d'un scalaire k peut affecter la **norme** ET la **direction** du vecteur.

Lorsque deux vecteurs sont parallèles, ces vecteurs sont décrits comme étant colinéaires. Ils sont décrits ainsi parce qu'ils peuvent être translatés pour se trouver sur la même droite. Les multiples scalaires de vecteurs sont colinéaires.



Règles :

1) Si $k > 0$, alors $k\vec{a}$ est dans la même direction que $\vec{a}$ avec une norme $k|\vec{a}|$

a) Si $0 < k < 1$, $\vec{a}$ est raccourci $\rightarrow \left|\frac{1}{2}\vec{a}\right| = \frac{1}{2}|\vec{a}|$

b) Si $k > 1$, $\vec{a}$ est allongé $\rightarrow |2\vec{a}| = 2|\vec{a}|$

2) Si $k < 0$, alors $k\vec{a}$ est dans la direction opposée à $\vec{a}$ avec une norme $|k||\vec{a}|$

a) Si $-1 < k < 0$, $\vec{a}$ est raccourci et change de direction opposée $\rightarrow \left|-\frac{1}{2}\vec{a}\right| = \frac{1}{2}|\vec{a}|$

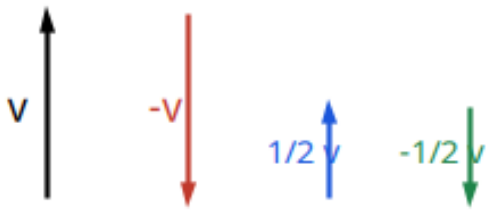
b) Si $k < -1$, $\vec{a}$ est allongé et change de direction opposée $\rightarrow |-2\vec{a}| = 2|\vec{a}|$

3) Si $k = 0$, le résultat est le vecteur nul $\vec{0}$

4) La propriété distributive pour la multiplication vectorielle est $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 1 : Un avion se dirige plein nord à 1000 km/h. La vitesse de l'avion est représentée par $\vec{v}$. Trace les vecteurs $-\vec{v}$, $\frac{1}{2}\vec{v}$, et $-\frac{1}{2}\vec{v}$ et donne une interprétation pour chacun.

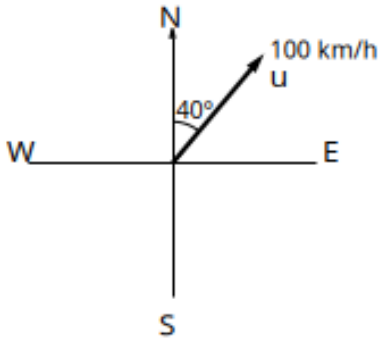


$-\vec{v}$; vecteur vitesse se dirigeant plein sud à 1000 km/h

$\frac{1}{2}\vec{v}$; vecteur vitesse se dirigeant plein nord à 500 km/h

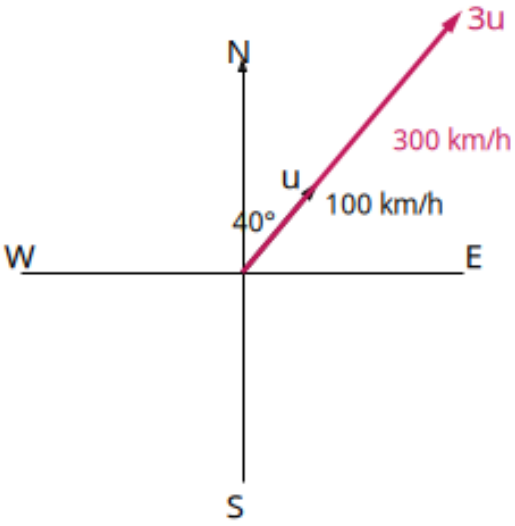
$-\frac{1}{2}\vec{v}$; vecteur vitesse se dirigeant plein sud à 500 km/h

Exemple 2 : Considère le vecteur $\vec{u}$ avec une norme $|\vec{u}| = 100$ km/h, à un relèvement par quadrant de $N40°E$. Trace un vecteur pour chaque multiplication scalaire. Décris le vecteur résultant.



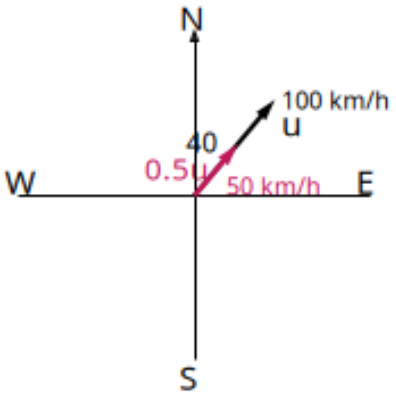
Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

a) $3\vec{u}$



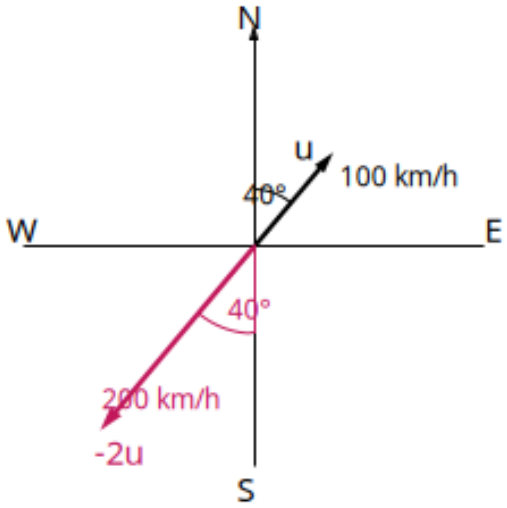
La vitesse est de 300 km/h à un relèvement par quadrant de $N40°E$.

b) $0.5\vec{u}$



La vitesse est de 50 km/h à un relèvement par quadrant de $N40°E$.

c) $-2\vec{u}$



Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

La vitesse est de 200 km/h à un relèvement par quadrant de $S40°O$.

Propriétés vectorielles pour la multiplication par un scalaire

Propriété distributive : Pour tout scalaire $k \in \mathbb{R}$ et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

Propriété associative : Pour tous scalaires $a, b \in \mathbb{R}$ et tout vecteur $\vec{v}$, $(ab)\vec{v} = a(b\vec{v})$

Propriété d'élément neutre : Pour tout vecteur $\vec{v}$, $1\vec{v} = \vec{v}$

Exemple 3 : Si $\vec{x} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{y} = \vec{j} - 5\vec{k}$, et $\vec{z} = -\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, détermine chacune des expressions suivantes en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$, et $\vec{k}$.

a) $\vec{x} + \vec{y}$

$$= (3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}) + (\vec{j} - 5\vec{k})$$
$$= 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} + \vec{j} - 5\vec{k}$$
$$= 3\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$$

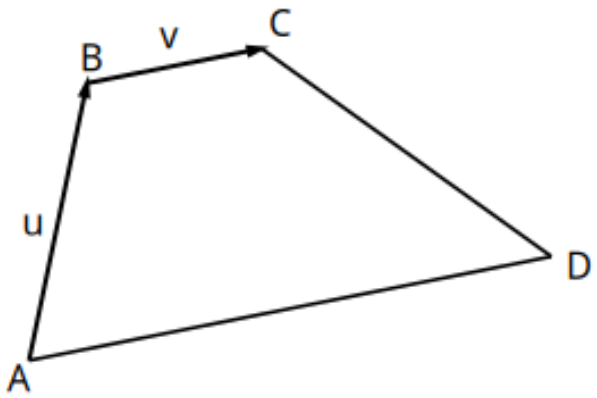
b) $\vec{x} - \vec{y}$

$$= (3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}) - (\vec{j} - 5\vec{k})$$
$$= 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} - \vec{j} + 5\vec{k}$$
$$= 3\vec{i} - 5\vec{j} + 6\vec{k}$$

c) $\vec{x} - 2\vec{y} + 3\vec{z}$

$$= (3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}) - 2(\vec{j} - 5\vec{k}) + 3(-\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k})$$
$$= 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} - 2\vec{j} + 10\vec{k} - 3\vec{i} - 3\vec{j} + 12\vec{k}$$
$$= -9\vec{j} + 23\vec{k}$$

Exemple 4 : Dans le trapèze ABCD, $BC \parallel AD$ et $AD = 3BC$. Soit $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. Exprime $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, et $\overrightarrow{CD}$ sous forme de combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



$\overrightarrow{AD} = 3\vec{v}$

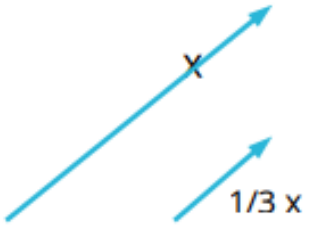
$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{u} + 3\vec{v}$

$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\vec{v} + (-\vec{u}) + 3\vec{v} = 2\vec{v} - \vec{u}$

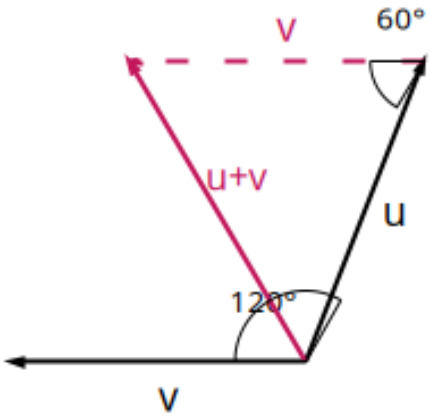
Partie 2 : Création de vecteurs unitaires

Il est parfois utile de multiplier le vecteur non nul $\vec{x}$ par le scalaire $\frac{1}{|\vec{x}|}$. Lorsqu'on multiplie $\vec{x}$ par $\frac{1}{|\vec{x}|}$, on obtient le vecteur $\frac{1}{|\vec{x}|}\vec{x}$. C'est un vecteur de longueur un, appelé vecteur unitaire, qui pointe dans la même direction que $\vec{x}$. Le concept de vecteur unitaire sera très utile lorsque nous discuterons des applications des vecteurs.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



Exemple 5 : Étant donné que $|\vec{u}| = 4$ et $|\vec{v}| = 5$ et que l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est de 120°, détermine le vecteur unitaire dans la même direction que $\vec{u} + \vec{v}$.



$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{u}||\vec{v}|\cos(60)$$
$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = (4)^2 + (5)^2 - 2(4)(5)\cos(60)$$
$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 41 - 40\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 21$$
$$|\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{21}$$

Pour créer un vecteur unitaire dans la même direction que $\vec{u} + \vec{v}$, multiplie par le scalaire égal à $\frac{1}{|\vec{u} + \vec{v}|}$

Donc, le vecteur unitaire est $\frac{1}{\sqrt{21}}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{\sqrt{21}}\vec{u} + \frac{1}{\sqrt{21}}\vec{v}$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.