4.3 Leçon sur la multiplication d'un vecteur par un scalaire

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

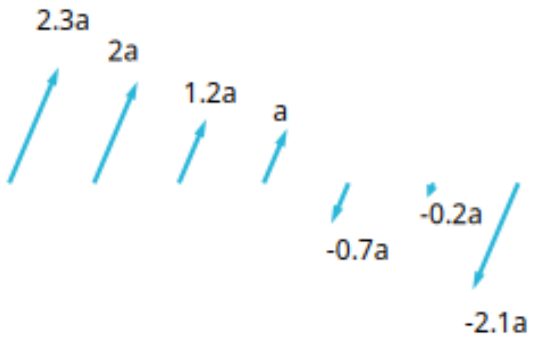
Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Multiplication par un scalaire

Dans cette section, nous allons multiplier un vecteur, $\vec{a}$, par un nombre k pour produire un nouveau vecteur $k\vec{a}$. Le nombre k utilisé pour la multiplication est appelé un _____ et peut être n'importe quel nombre réel.

Multiplier un vecteur par différentes valeurs d'un scalaire k peut affecter la **norme** ET la **direction** du vecteur.

Lorsque deux vecteurs sont parallèles, ces vecteurs sont décrits comme étant _____. Ils sont décrits ainsi parce qu'ils peuvent être translatés pour se trouver sur la même droite. Les multiples scalaires de vecteurs sont colinéaires.



Règles :

1) Si $k > 0$, alors $k\vec{a}$ est dans la même direction que $\vec{a}$ avec une norme $k|\vec{a}|$

a) Si $0 < k < 1$, $\vec{a}$ est raccourci $\rightarrow \left|\frac{1}{2}\vec{a}\right| = \frac{1}{2}|\vec{a}|$

b) Si $k > 1$, $\vec{a}$ est allongé $\rightarrow |2\vec{a}| = 2|\vec{a}|$

2) Si $k < 0$, alors $k\vec{a}$ est dans la direction opposée à $\vec{a}$ avec une norme $|k||\vec{a}|$

a) Si $-1 < k < 0$, $\vec{a}$ est raccourci et change de direction opposée $\rightarrow \left|-\frac{1}{2}\vec{a}\right| = \frac{1}{2}|\vec{a}|$

b) Si $k < -1$, $\vec{a}$ est allongé et change de direction opposée $\rightarrow |-2\vec{a}| = 2|\vec{a}|$

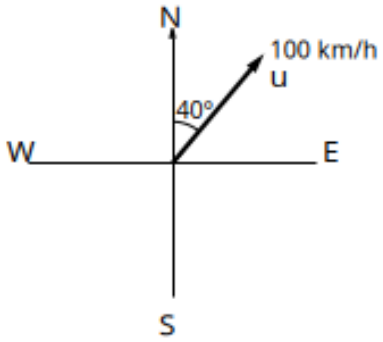
3) Si $k = 0$, le résultat est le vecteur nul $\vec{0}$

4) La propriété distributive pour la multiplication vectorielle est $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

Exemple 1 : Un avion se dirige plein nord à 1000 km/h. La vitesse de l'avion est représentée par $\vec{v}$. Trace les vecteurs $-\vec{v}$, $\frac{1}{2}\vec{v}$, et $-\frac{1}{2}\vec{v}$ et donne une interprétation pour chacun.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 2 : Considère le vecteur $\vec{u}$ avec une norme $|\vec{u}| = 100$ km/h, à un relèvement par quadrant de $N40°E$. Trace un vecteur pour chaque multiplication scalaire. Décris le vecteur résultant.



a) $3\vec{u}$

b) $0.5\vec{u}$

c) $-2\vec{u}$

Propriétés vectorielles pour la multiplication par un scalaire

Propriété distributive : Pour tout scalaire $k \in \mathbb{R}$ et tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$

Propriété associative : Pour tous scalaires $a, b \in \mathbb{R}$ et tout vecteur $\vec{v}$, $(ab)\vec{v} = a(b\vec{v})$

Propriété d'élément neutre : Pour tout vecteur $\vec{v}$, $1\vec{v} = \vec{v}$

Exemple 3 : Si $\vec{x} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{y} = \vec{j} - 5\vec{k}$, et $\vec{z} = -\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$, détermine chacune des expressions suivantes en fonction de $\vec{i}$, $\vec{j}$, et $\vec{k}$.

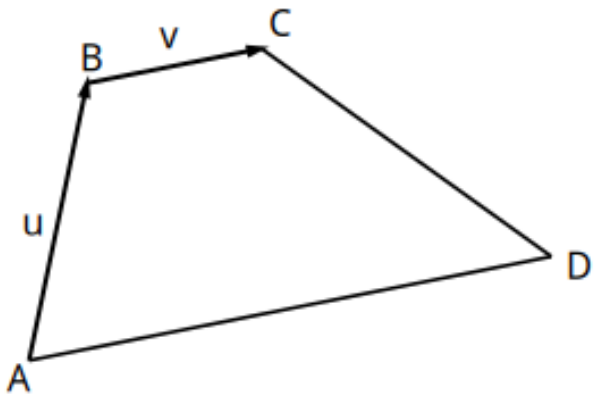
a) $\vec{x} + \vec{y}$

b) $\vec{x} - \vec{y}$

c) $\vec{x} - 2\vec{y} + 3\vec{z}$

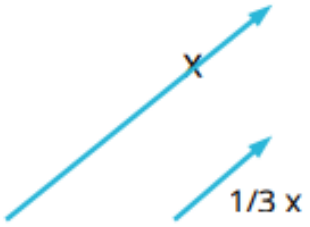
Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 4 : Dans le trapèze ABCD, $BC \parallel AD$ et $AD = 3BC$. Soit $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$. Exprime $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, et $\overrightarrow{CD}$ sous forme de combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



Partie 2 : Création de vecteurs unitaires

Il est parfois utile de multiplier le vecteur non nul $\vec{x}$ par le scalaire $\frac{1}{|\vec{x}|}$. Lorsqu'on multiplie $\vec{x}$ par $\frac{1}{|\vec{x}|}$, on obtient le vecteur $\frac{1}{|\vec{x}|}\vec{x}$. C'est un vecteur de longueur un, appelé _____, qui pointe dans la même direction que $\vec{x}$. Le concept de vecteur unitaire sera très utile lorsque nous discuterons des applications des vecteurs.



Exemple 5 : Étant donné que $|\vec{u}| = 4$ et $|\vec{v}| = 5$ et que l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est de 120°, détermine le vecteur unitaire dans la même direction que $\vec{u} + \vec{v}$.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.