3.6 Fiche d'exercices sur les applications des dérivées exponentielles et trigonométriques avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

1) Un échantillon de 100 mg de thorium-233 (Th-233) est placé dans un réacteur nucléaire. Après 10 min, l'échantillon s'est décomposé à 73 mg. Utilise l'équation $N(t) = N_0e^{-\lambda t}$ pour répondre aux questions suivantes :

a) Détermine la constante de désintégration λ pour le Th-233.

$$73 = 100e^{-10\lambda}$$
$$0.73 = e^{-10\lambda}$$
$$\ln(0.73) = -10\lambda$$
$$\lambda \cong 0.031$$

b) Détermine la demi-vie du Th-233

$$50 = 100e^{-0.031t}$$
$$0.5 = e^{-0.031t}$$
$$\ln(0.5) = -0.031t$$
$$t \cong 22 \text{ minutes}$$

c) Écris l'équation qui donne la quantité de Th-233 restante en fonction du temps, en termes de demi-vie.

$$N(t) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{22}}$$

d) À quelle vitesse l'échantillon se décompose-t-il après 5 min?

$$N'(t) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{22}} \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{22}\right)$$
$$N'(5) \cong -2.7 \text{ mg/min}$$

2) Le radon-222 (Rn-222) est un élément radioactif qui se décompose spontanément en polonium-218 (Po-218) avec une demi-vie de 3,8 jours. Les atomes de ces deux substances ont approximativement la même masse. Suppose que l'échantillon initial de radon a une masse de 100 mg.

La masse de radon, en milligrammes, en fonction du temps est donnée par la fonction $M_{Rn}(t) = M_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3.8}}$, où M_0 est la masse initiale de radon et M_{Rn} est la masse de radon après le temps t, en jours.

a) Combien de radon restera-t-il après

i) 1 jour?

$$M_{Rn}(1) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3.8}}$$
$$M_{Rn}(1) \cong 83.3 \text{ mg}$$

ii) 1 semaine?

$$M_{Rn}(7) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{7}{3.8}}$$
$$M_{Rn}(7) \cong 27.9 \text{ mg}$$

b) À quel taux le radon se décompose-t-il à chacun de ces moments?

$$M(t) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3.8}}$$
$$M'(t) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3.8}} \ln\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3.8}\right)$$
$$M'(1) \cong -15.2 \text{ mg/jour}$$
$$M'(7) \cong -5.1 \text{ mg/jour}$$

c) Combien de temps faudra-t-il pour qu'un échantillon de radon se décompose à 25% de sa masse initiale?

$$25 = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3.8}}$$
$$0.25 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3.8}}$$
$$\log_{0.5}(0.25) = \frac{t}{3.8}$$
$$t \cong 7.6 \text{ jours}$$

3) Considère un amortisseur de voiture modélisé par l'équation $h(t) = e^{-0.5t}\sin t$, où $h(t)$ représente le déplacement

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

vertical, en mètres, en fonction du temps, t, en secondes. Détermine quand se produit la vitesse verticale maximale, en m/s, et sa valeur, sachant que $v(t) = h'(t)$.

$$v(t) = h'(t) = -0.5e^{-0.5t}\sin t + \cos t(e^{-0.5t})$$
$$v(t) = -0.5e^{-0.5t}(\sin t - 2\cos t)$$
$$a(t) = v'(t) = 0.25e^{-0.5t}(\sin t - 2\cos t) + (\cos t + 2\sin t)(-0.5e^{-0.5t})$$
$$a(t) = 0.25e^{-0.5t}[\sin t - 2\cos t - 2(\cos t + 2\sin t)]$$
$$0 = 0.25e^{-0.5t}(-3\sin t - 4\cos t)$$
$$0 = -3\sin t - 4\cos t$$
$$4\cos t = -3\sin t$$
$$-\frac{4}{3} = \tan t$$
$$t \cong -0.927,\ 2.214,\ 5.356,\ \ldots$$

Teste les nombres critiques (et $t = 0$, puisque $t \geq 0$) :

$$v(0) = 1 \text{ m/s}$$
$$v(2.214) \cong 0.0687 \text{ m/s}$$
$$v(5.356) \cong -0.33 \text{ m/s}$$

Vitesse max de 1 m/s à 0 seconde.

4) Rocco et Biff sont deux koalas qui cherchent de la nourriture ensemble dans un eucalyptus. Soudainement, une rafale de vent fait perdre prise à Rocco et il commence à tomber. Il attrape rapidement une liane à proximité et commence à se balancer en s'éloignant de l'arbre. Le déplacement horizontal de Rocco en fonction du temps est donné par l'équation $x(t) = 5\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)e^{-0.1t}$ où x est le déplacement horizontal de Rocco depuis le bas de son arc de balancement, en mètres, au temps t, en secondes.

a) Biff peut attraper Rocco si Rocco se balance à moins de 1 mètre de l'endroit où il a commencé à tomber. Biff pourra-t-il secourir Rocco? Explique, en utilisant un raisonnement mathématique.

Position initiale :

$$x(0) = 5\cos(0) \cong 5 \text{ m}$$

Période :

$$\text{Période} = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4 \text{ secondes}$$

Position après 4 secondes :

$$x(4) = 5\cos(2\pi)e^{-0.4} \cong 3.35 \text{ m}$$

Il est à 1,65 m de l'endroit où il a commencé. Biff ne pourra PAS secourir Rocco.

b) L'autre option de Rocco est de lâcher la liane au bas d'un des arcs de balancement et de tomber au sol. Mais Rocco ne se sentira en sécurité en faisant cela que si sa vitesse horizontale au bas du balancement est inférieure à 2 m/s. En supposant que Biff ne peut pas sauver son ami, combien de fois Rocco doit-il se balancer d'avant en arrière sur la liane avant de pouvoir tomber au sol en toute sécurité?

$$x(t) = 5e^{-0.1t}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$
$$v(t) = x'(t) = -0.5e^{-0.1t}\cos\left(\frac{\pi t}{2}\right) - \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{2}\right)(5)e^{-0.1t}$$

Quand est-il au bas?

$$0 = \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)$$
$$\frac{\pi t}{2} = \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \ldots$$
$$t = 1,\ 3,\ 5,\ 7,\ \ldots$$
$$t = 1 + 2k;\ \{k \in \mathbb{Z} | k \geq 0\}$$

En évaluant la vitesse à chaque passage au bas (le terme en cosinus s'annule, ne laissant que le terme en sinus) :

$$|v(1)| \cong 7.11 \text{ m/s} \quad |v(3)| \cong 5.82 \text{ m/s} \quad |v(5)| \cong 4.76 \text{ m/s} \quad |v(7)| \cong 3.90 \text{ m/s}$$
$$|v(9)| \cong 3.19 \text{ m/s} \quad |v(11)| \cong 2.61 \text{ m/s} \quad |v(13)| \cong 2.14 \text{ m/s} \quad |v(15)| \cong 1.75 \text{ m/s}$$

Nombre de balancements $= \frac{15}{4} = 3.75$ fois

5) Le signal de tension d'une prise murale nord-américaine standard peut être décrit par l'équation $V(t) = 170\sin(120\pi t)$, où t est le temps, en secondes, et V est la tension, en volts, au temps t.

a) Trouve les niveaux de tension max et min et les moments où ils se produisent.

$$\text{Max} = 0 + 170 = 170 \text{ V}$$
$$170 = 170\sin(120\pi t)$$
$$1 = \sin(120\pi t)$$
$$120\pi t = \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{9\pi}{2},\ \ldots$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$$t = \frac{1}{240}, \frac{5}{240}, \frac{9}{240}, \ldots$$

Une tension max de 170 V lorsque $t = \frac{1+4k}{240}, \{k \in \mathbb{Z} | k \geq 0\}$

$$\text{Min} = 0 - 170 = -170 \text{ V}$$
$$-170 = 170\sin(120\pi t)$$
$$-1 = \sin(120\pi t)$$
$$120\pi t = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots$$
$$t = \frac{3}{240}, \frac{7}{240}, \frac{11}{240}, \ldots$$

Une tension min de -170 V lorsque $t = \frac{3+4k}{240}, \{k \in \mathbb{Z} | k \geq 0\}$

b) Pour le signal donné, détermine

i) la période, T, en secondes

$$T = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi}{120\pi} = \frac{1}{60} \text{ secondes}$$

ii) la fréquence, f, en hertz

$$f = \frac{1}{\text{Période}} = 60 \text{ Hz}$$

iii) l'amplitude, A, en volts

$$A = |a| = 170 \text{ V}$$

6) Considère un pendule simple ayant une longueur de 50 cm et un déplacement horizontal max de 8 cm.

a) Trouve la période du pendule.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0.5}{9.8}} \cong 1.42 \text{ secondes}$$

b) Détermine une fonction qui donne la position horizontale du poids en fonction du temps.

$$h(t) = 8\cos\left(\frac{2\pi t}{2\pi\sqrt{\frac{0.5}{9.8}}}\right)$$
$$h(t) = 8\cos(4.43t)$$

c) Détermine une fonction qui donne la vitesse du poids en fonction du temps.

$$v(t) = h'(t) = 8[-\sin(4.43t)](4.43)$$
$$v(t) = -35.44\sin(4.43t)$$

d) Détermine une fonction qui donne l'accélération du poids en fonction du temps.

$$a(t) = v'(t) = -35.44[\cos(4.43t)](4.43)$$
$$a(t) = -157\cos(4.43t)$$

e) Trouve la vitesse max du poids et le moment où elle se produit pour la première fois.

$$\text{Max} = 0 + 35.44 = 35.44 \text{ cm/s}$$
$$35.44 = -35.44\sin(4.43t)$$
$$-1 = \sin(4.43t)$$
$$4.43t = \frac{3\pi}{2}$$
$$t \cong 1.06 \text{ secondes}$$

Vitesse max : 35,4 cm/s au temps $t = 1.06$ s

7) Un piston dans un moteur oscille de haut en bas depuis une position de repos. Le mouvement de ce piston peut être approximé par la fonction $h(t) = 0.05\cos(13t)$, où t est le temps, en secondes, et h est le déplacement de la tête du piston depuis la position de repos, en mètres, au temps t.

a) Détermine une équation pour la vitesse de la tête du piston en fonction du temps.

$$v(t) = h'(t) = 0.05[-\sin(13t)](13)$$
$$v(t) = -0.65\sin(13t)$$

b) Trouve les vitesses max et min et les moments où elles se produisent.

$$\text{Max} = 0 + 0.65 = 0.65 \text{ m/s}$$
$$0.65 = -0.65\sin(13t)$$
$$-1 = \sin(13t)$$
$$13t = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots$$
$$t = \frac{3\pi}{26}, \frac{7\pi}{26}, \frac{11\pi}{26}, \ldots$$

Vitesse max de 0,65 m/s lorsque $t = \frac{(4k+3)\pi}{26} \{k \in \mathbb{Z} | k \geq 0\}$

$$\text{Min} = 0 - 0.65 = -0.65 \text{ m/s}$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$$\begin{aligned} -0.65 &= -0.65\sin(13t) \\ 1 &= \sin(13t) \\ 13t &= \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots \\ t &= \frac{\pi}{26}, \frac{5\pi}{26}, \frac{9\pi}{26}, \ldots \end{aligned}$$

Vitesse min de -0.65 m/s lorsque $t = \frac{(4k+1)\pi}{26}\{k \in \mathbb{Z} | k \geq 0\}$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.