# 3.6 Leçon sur les applications des dérivées exponentielles et trigonométriques avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

## Partie 1 : Révision de la dérivation des fonctions exponentielles

| Règle | Dérivée |
|---|---|
| **Fonctions exponentielles**<br>Si $h(x) = b^{g(x)}$ | $h'(x) = b^{g(x)} \times \ln b \times g'(x)$ |
| **Fonctions trigonométriques**<br>Si $f(x) = \sin x$<br>$g(x) = \cos x$<br>$h(x) = \tan x$ | $f'(x) = \cos x$<br>$g'(x) = -\sin x$<br>$h'(x) = \sec^2 x$ |
| **Fonctions logarithmiques**<br>Si $g(x) = \log_a[f(x)]$ | $g'(x) = \dfrac{f'(x)}{f(x)\ln a}$ |

*La lettre grecque $\lambda$, lambda, indique la constante de désintégration, qui est liée à la vitesse de décroissance d'une substance radioactive.*

**Exemple 1 :** Dérive $y = 3^x e^{\sin x}$ par rapport à $x$.

$$y' = 3^x(\ln 3)(e^{\sin x}) + e^{\sin x}(\ln e)(\cos x)(3^x)$$
$$y' = 3^x(\ln 3)(e^{\sin x}) + e^{\sin x}(\cos x)(3^x)$$
$$y' = 3^x e^{\sin x}(\ln 3 + \cos x)$$

**Exemple 2 :** Un isotope radioactif de l'or, l'Au-198, est utilisé dans le diagnostic et le traitement des maladies du foie. Suppose qu'un échantillon de 6,0 mg d'Au-198 est injecté dans un foie, et que cet échantillon se décompose à 4,6 mg après 1 jour. Suppose que la quantité d'Au-198 restante après $t$ jours est donnée par $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

a) Détermine la constante de désintégration pour l'Au-198

$$4.6 = 6e^{-\lambda(1)}$$
$$\frac{4.6}{6} = e^{-\lambda}$$
$$-\lambda = \ln\left(\frac{4.6}{6}\right)$$
$$\lambda = -\ln\left(\frac{4.6}{6}\right)$$
$$\lambda \cong 0.266 \text{ jours}$$

b) Détermine la demi-vie de l'Au-198

$$3 = 6e^{-0.266t}$$
$$0.5 = e^{-0.266t}$$
$$\ln(0.5) = -0.266t$$
$$t = \frac{\ln(0.5)}{-0.266}$$
$$t \cong 2.6 \text{ jours}$$

c) Écris l'équation qui donne la quantité d'Au-198 restante en fonction du temps, en termes de sa demi-vie.

$$N(t) = 6\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2.6}}$$

d) À quelle vitesse l'échantillon se décompose-t-il après 3 jours?

$$N(t) = 6e^{-0.266t}$$
$$N'(t) = 6(e^{-0.266t})(\ln e)(-0.266)$$
$$N'(t) = -1.596(e^{-0.266t})$$
$$N'(3) = -1.596\left[e^{-0.266(3)}\right]$$
$$N'(3) = -0.72 \text{ mg/jour}$$

La quantité d'or diminue d'environ 0,72 mg/jour.

**Exemple 3 :** Une source d'alimentation délivre un signal de tension qui consiste en une composante de courant alternatif (CA) et une composante de courant continu (CC). Où $t$ est le temps, en secondes, la tension, en volts, au

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés. 

temps $t$ est donnée par la fonction $V(t) = 5\sin t + 12$.

a) Quelles sont les tensions maximale et minimale? À quels moments ces valeurs se produisent-elles?

$$\text{Max} = c + |a| = 12 + 5 = 17\text{ V}$$
$$\text{Min} = c - |a| = 12 - 5 = 7\text{ V}$$

Détermine quand elles se produisent en résolvant les équations suivantes :

$$17 = 5\sin t + 12$$
$$5 = 5\sin t$$
$$1 = \sin t$$
$$t = \frac{\pi}{2}$$

Il y a un maximum de 17 V lorsque $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

$$7 = 5\sin t + 12$$
$$-5 = 5\sin t$$
$$-1 = \sin t$$
$$t = \frac{3\pi}{2}$$

Il y a un minimum de 7 V lorsque $t = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

b) Détermine la période, $T$, en secondes, la fréquence, $f$, en hertz, et l'amplitude, $A$, en volts, pour ce signal.

Période :

$$T = \frac{2\pi}{|k|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi \text{ secondes}$$

Fréquence :

La fréquence est l'inverse de la période.

$$f = \frac{1}{2\pi}\text{ Hz}$$

Amplitude :

$$A = |a| = 5\text{ V}$$

**Exemple 4 :** Pour de petites amplitudes, et en ignorant les effets de la friction, un pendule est un exemple de mouvement harmonique simple. Le mouvement harmonique simple est un mouvement qui peut être modélisé par une fonction sinusoïdale, et le graphique d'une fonction modélisant un mouvement harmonique simple a une amplitude constante.

La période d'un pendule simple dépend uniquement de sa longueur et peut être trouvée à l'aide de la relation $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, où $T$ est la période, en secondes, $l$ est la longueur du pendule, en mètres, et $g$ est l'accélération due à la gravité. Sur ou près de la surface de la Terre, $g$ a une valeur constante de 9,8 m/s$^2$.

Dans ces conditions, la position horizontale du poids en fonction du temps peut être décrite par la fonction $h(t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, où $A$ est l'amplitude du pendule, $t$ est le temps, en secondes, et $T$ est la période du pendule, en secondes.

Trouve la vitesse max du poids et le moment où cette vitesse se produit pour la première fois pour un pendule ayant une longueur de 1,0 mètre et une amplitude de 5 cm.

Commence par trouver la période :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1.0}{9.8}} \cong 2.0 \text{ secondes.}$$

Donc, l'équation de position est :

$$h(t) = 5\cos\left(\frac{2\pi t}{2}\right)$$
$$h(t) = 5\cos(\pi t)$$

Pour trouver la vitesse max, nous devons trouver la valeur max OU min de l'équation de vitesse (dérivée de l'équation de position).

$$v(t) = h'(t) = -5\sin(\pi t)(\pi)$$
$$v(t) = -5\pi\sin(\pi t)$$

Vitesse min :

$$-5\pi = -5\pi\sin(\pi t)$$
$$\sin(\pi t) = 1$$
$$\pi t = \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}, \ldots$$
$$t = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \ldots$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés. 

$$t = \frac{1+4k}{2}; \{k \in \mathbb{Z} | k \geq 0\}$$

Vitesse max :

$$5\pi = -5\pi \sin(\pi t)$$
$$\sin(\pi t) = -1$$
$$\pi t = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \frac{11\pi}{2}, \ldots$$
$$t = \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \ldots$$
$$t = \frac{3+4k}{2}; \{k \in \mathbb{Z} | k \geq 0\}$$

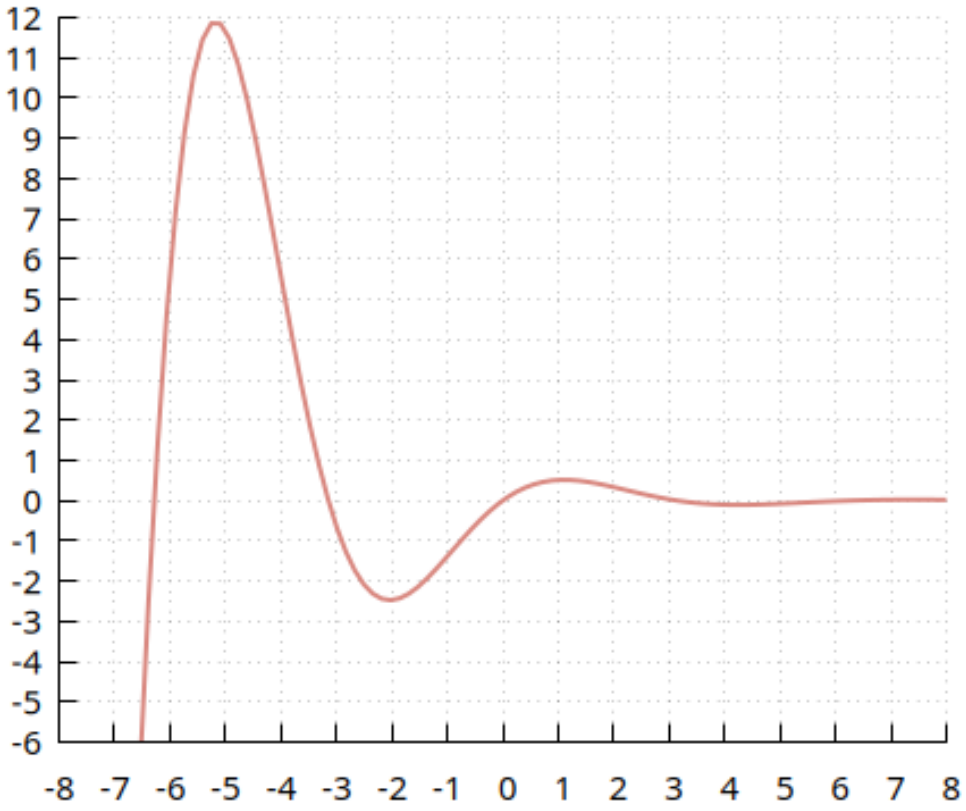
La première vitesse max se produit à 0,5 seconde.

$$v(0.5) = -5\pi \sin[\pi(0.5)] = -5\pi \cong -15.7 \text{ cm/s.}$$

Donc, la vitesse max est de 15,7 cm/s et elle se produit après 0,5 seconde.

**Exemple 5 :** Le déplacement vertical de la carrosserie d'un VUS après avoir franchi une bosse est modélisé par la fonction $h(t) = e^{-0.5t} \sin t$, où $h$ est le déplacement vertical, en mètres, au temps $t$, en secondes.

a) Utilise la technologie pour générer une esquisse approximative du graphique de la fonction.




b) Détermine quand se produit le déplacement max de la carrosserie du véhicule utilitaire sport.

$$h'(t) = e^{-0.5t}(-0.5)(\sin t) + \cos t(e^{-0.5t})$$
$$h'(t) = e^{-0.5t}(-0.5\sin t + \cos t)$$
$$0 = e^{-0.5t}(-0.5\sin t + \cos t)$$

$e^{-0.5t} = 0$ n'a aucune solution

$$0 = -0.5\sin t + \cos t$$
$$0.5\sin t = \cos t$$
$$0.5\tan t = 1$$
$$\tan t = 2$$
$$t = \tan^{-1}(2)$$
$$t \cong 1.1 \text{ secondes}$$

*Il y a un nombre infini de solutions à ceci, mais nous voulons seulement la première réponse positive puisque le déplacement vertical diminue à mesure que le temps augmente. D'après le graphique, nous savons qu'il s'agit d'un maximum et non d'un minimum, mais nous pourrions le vérifier à l'aide du critère de la dérivée première ou seconde.*

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés. 

c) Détermine le déplacement maximal.

$$h(1.1) = e^{-0.5(1.1)}\sin(1.1)$$
$$h(1.1) \cong 0.51 \text{ m}$$

*Remarque que l'amplitude diminue avec le temps. Ce mouvement est appelé MOUVEMENT HARMONIQUE AMORTI.*

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés. 