3.6 Leçon sur les applications des dérivées exponentielles et trigonométriques

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Révision de la dérivation des fonctions exponentielles

Règle	Dérivée
Fonctions exponentielles Si $h(x) = b^{g(x)}$	$h'(x) = b^{g(x)} \times \ln b \times g'(x)$
Fonctions trigonométriques Si $f(x) = \sin x$ $g(x) = \cos x$ $h(x) = \tan x$	$f'(x) = \cos x$ $g'(x) = -\sin x$ $h'(x) = \sec^2 x$
Fonctions logarithmiques Si $g(x) = \log_a[f(x)]$	$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)\ln a}$

La lettre grecque λ, lambda, indique la constante de désintégration, qui est liée à la vitesse de décroissance d'une substance radioactive.

Exemple 1 : Dérive $y = 3^x e^{\sin x}$ par rapport à x.

Exemple 2 : Un isotope radioactif de l'or, l'Au-198, est utilisé dans le diagnostic et le traitement des maladies du foie. Suppose qu'un échantillon de 6,0 mg d'Au-198 est injecté dans un foie, et que cet échantillon se décompose à 4,6 mg après 1 jour. Suppose que la quantité d'Au-198 restante après t jours est donnée par $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

a) Détermine la constante de désintégration pour l'Au-198

b) Détermine la demi-vie de l'Au-198

c) Écris l'équation qui donne la quantité d'Au-198 restante en fonction du temps, en termes de sa demi-vie.

d) À quelle vitesse l'échantillon se décompose-t-il après 3 jours?

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 3 : Une source d'alimentation délivre un signal de tension qui consiste en une composante de courant alternatif (CA) et une composante de courant continu (CC). Où t est le temps, en secondes, la tension, en volts, au temps t est donnée par la fonction $V(t) = 5\sin t + 12$.

a) Quelles sont les tensions maximale et minimale? À quels moments ces valeurs se produisent-elles?

b) Détermine la période, T, en secondes, la fréquence, f, en hertz, et l'amplitude, A, en volts, pour ce signal.

Exemple 4 : Pour de petites amplitudes, et en ignorant les effets de la friction, un pendule est un exemple de mouvement harmonique simple. Le mouvement harmonique simple est un mouvement qui peut être modélisé par une fonction sinusoïdale, et le graphique d'une fonction modélisant un mouvement harmonique simple a une amplitude constante.

La période d'un pendule simple dépend uniquement de sa longueur et peut être trouvée à l'aide de la relation $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, où T est la période, en secondes, l est la longueur du pendule, en mètres, et g est l'accélération due à la gravité. Sur ou près de la surface de la Terre, g a une valeur constante de 9,8 m/s^2.

Dans ces conditions, la position horizontale du poids en fonction du temps peut être décrite par la fonction $h(t) = A\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, où A est l'amplitude du pendule, t est le temps, en secondes, et T est la période du pendule, en secondes.

Trouve la vitesse max du poids et le moment où cette vitesse se produit pour la première fois pour un pendule ayant une longueur de 1,0 mètre et une amplitude de 5 cm.

Exemple 5 : Le déplacement vertical de la carrosserie d'un VUS après avoir franchi une bosse est modélisé par la fonction $h(t) = e^{-0.5t}\sin t$, où h est le déplacement vertical, en mètres, au temps t, en secondes.

a) Utilise la technologie pour générer une esquisse approximative du graphique de la fonction.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

b) Détermine quand se produit le déplacement max de la carrosserie du véhicule utilitaire sport.

c) Détermine le déplacement maximal.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.