3.5 Leçon sur la dérivation implicite et les dérivées des fonctions logarithmiques avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Règle de chaîne avec la notation de Leibniz

Si y est une fonction de u et u est une fonction de x, alors $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$.

Exemple 1 : Supposons que nous voulons dériver $y = (5+2x)^{10}$ afin de calculer $\frac{dy}{dx}$. Nous faisons une substitution et posons $u = 5+2x$ de sorte que $y = u^{10}$

La règle de chaîne énonce :

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

Si $y = u^{10}$ alors $\frac{dy}{du} = 10u^9$

Si $u = 5+2x$ alors $\frac{du}{dx} = 2$

Donc :

$$\frac{dy}{dx} = 10u^9 \times 2$$
$$\frac{dy}{dx} = 20u^9$$
$$\frac{dy}{dx} = 20(5+2x)^9$$

Partie 2 : Dérivation implicite

Jusqu'à maintenant, la plupart des fonctions étaient écrites sous la forme où y était défini explicitement comme une fonction de x, comme $y = x^3 - 4x$. Dans cette équation, y est isolé et est exprimé EXPLICITEMENT comme une fonction de x.

Les fonctions peuvent aussi être définies implicitement par des relations, comme un cercle $x^2 + y^2 = 16$. Dans ce cas, y n'est pas isolé ou défini explicitement en termes de x. Tu pourrais réarranger pour isoler y mais souvent c'est très difficile ou impossible. Il sera nécessaire d'utiliser la règle de chaîne pour dériver implicitement lorsque c'est sous forme implicite.

$\frac{d}{dx}f(y) = \frac{d}{dy}f(y) \times \frac{dy}{dx}$

Exemple 2 : Dérive chacune des fonctions suivantes à l'aide de la dérivation implicite

a) $x^2 + y^2 = 16$

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dy}y^2 \times \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}16$$
$$2x + 2y \times \frac{dy}{dx} = 0$$
$$2y \times \frac{dy}{dx} = -2x$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{2y}$$

b) $y^2 + x^3 - y^3 + 6 = 3y$

$$2y(y') + 3x^2 - 3y^2(y') = 3(y')$$
$$2y(y') - 3y^2(y') - 3(y') = -3x^2$$
$$y'(2y - 3y^2 - 3) = -3x^2$$
$$y' = \frac{-3x^2}{2y - 3y^2 - 3}$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Partie 3 : Dérivée des logarithmes

Démonstration de la dérivée de $y = \log_a x$

Commence par écrire sous la forme inverse :

$$a^y = x$$

Utilise maintenant la dérivation implicite pour dériver par rapport à x

$$\ln a(a^y)y' = 1$$
$$y' = \frac{1}{\ln a(a^y)}$$
$$y' = \frac{1}{x \ln a}$$

Règle :

$\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

Si tu as besoin de la règle de chaîne :

$\frac{d}{dx} \log_a[f(x)] = \frac{1}{f(x) \ln a} f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x) \ln a}$

Exemple 3 : Dérive chacune des fonctions suivantes par rapport à x.

a) $y = 2\ln(1 + x^2)$

$$\frac{dy}{dx} = 2\frac{1}{(1 + x^2)\ln e}(2x)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x}{1 + x^2}$$

b) $f(x) = 1 - \log_4(2x - 1)$

$$\frac{dy}{dx} = 0 - \frac{1}{(2x - 1)\ln 4}(2)$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{(2x - 1)\ln 4}$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.