3.3 Leçon sur les dérivées des fonctions exponentielles avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Révision de e et $\ln x$

Propriétés de e:

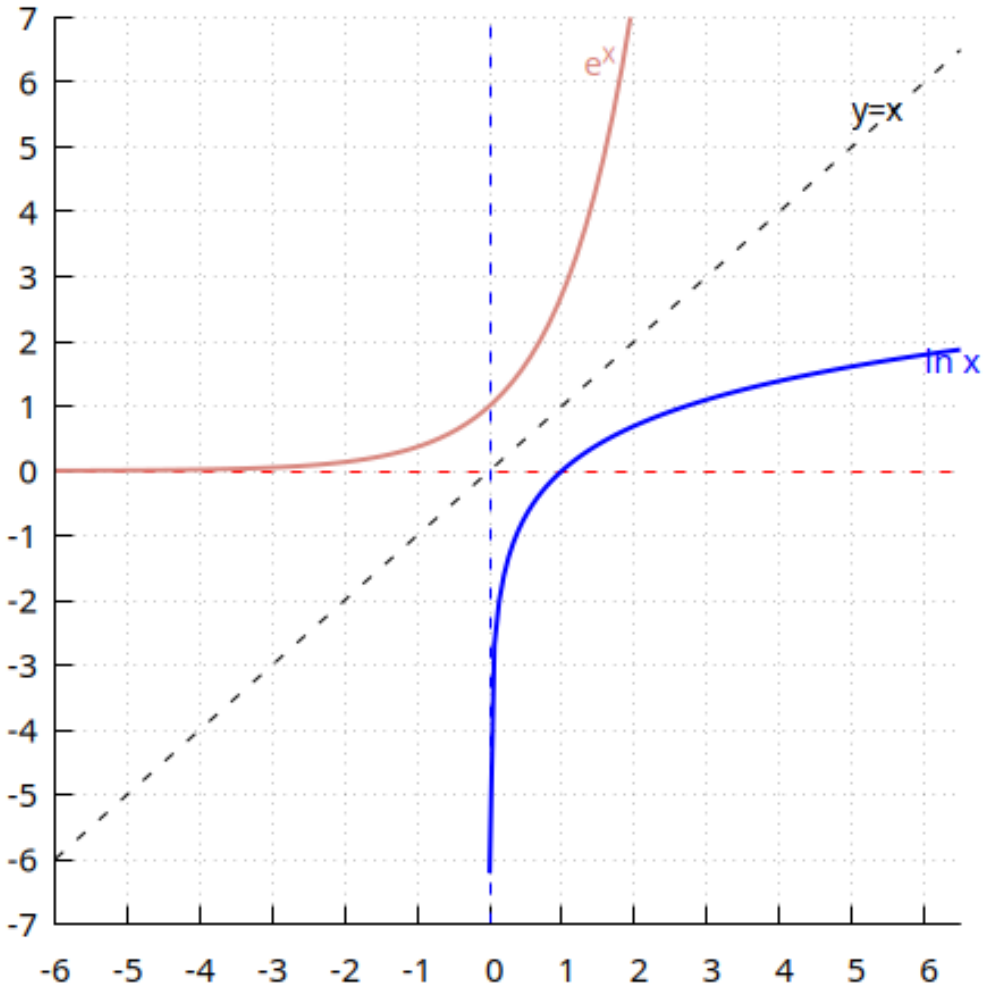
- $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \approx 2.718\,281\,828\,459$
- e est un nombre irrationnel, semblable à π. Ils sont non-terminaux et non-répétitifs.
- $\log_e x$ est connu comme le logarithme naturel et peut s'écrire ln x
- De nombreux phénomènes naturels peuvent être modélisés à l'aide de fonctions exponentielles et logarithmiques de base e.
- $\log_e e = \ln e = 1$

Exemple 1 : Trace les fonctions $y = e^x$ et $y = \ln x$

$x\,(y = e^x)$	y	$x\,(y = \ln x)$	y
-1	0.37	0.37	-1
0	1	1	0
1	2.72	2.72	1
AH	$y = 0$	AV	$x = 0$

Remarque : $y = \ln x$ est la fonction réciproque de $y = e^x$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



Exemple 2 : La population d'une culture bactérienne en fonction du temps est donnée par l'équation $P(t) = 200e^{0.094t}$, où P est la population après t jours.

a) Quelle est la population initiale de la culture bactérienne?

$$P(0) = 200e^{0.094(0)}$$
$$P(0) = 200$$

b) Estime la population après 3 jours.

$$P(3) = 200e^{0.094(3)}$$
$$P(3) \cong 265.2$$

c) Combien de temps la culture bactérienne mettra-t-elle à doubler sa population?

$$400 = 200e^{0.094t}$$
$$2 = e^{0.094t}$$
$$\ln 2 = \ln e^{0.094t}$$
$$\ln 2 = 0.094t \ln e$$
$$\ln 2 = 0.094t$$
$$t = \frac{\ln 2}{0.094}$$
$$t \cong 7.37 \text{ jours}$$

d) Réécris cette fonction comme une fonction exponentielle de base 2.

$$P(t) = 200(2)^{\frac{t}{7.37}}$$

Utilise la formule de croissance exponentielle :

$$A(t) = A_0(2)^{\frac{t}{D}}$$

où D est la période de doublement

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Partie 2 : Dérivées des fonctions exponentielles

Règle : Si $f(x) = b^x$, $f'(x) = b^x \ln b$

Exemple 3 : Détermine la dérivée de chaque fonction

a) $y = 2^x$

$$y' = 2^x \ln 2$$

b) $y = e^x$

$$y' = e^x \ln e$$
$$y' = e^x(1)$$
$$y' = e^x$$

c) $y = 3(2)^x$

$$y' = 3(2)^x \ln 2$$

d) $y = 3^x + 1$

$$y' = 3^x \ln 3$$

Remarque : $\frac{d}{dx} e^x = e^x$

Exemple 4 : Trouve l'équation de la droite tangente à la courbe $y = 2e^x$ en $x = \ln 3$.

Pente de la tangente :

$$y' = 2e^x$$
$$y'(\ln 3) = 2e^{\ln 3}$$
$$y'(\ln 3) = 2(3)$$
$$y'(\ln 3) = 6$$
$$m = 6$$

Point sur la tangente :

$$y = 2e^x$$

Lorsque $x = \ln 3$

$$y = 2e^{\ln 3}$$
$$y = 2(3)$$
$$y = 6$$

Équation de la tangente :

$$y = mx + b$$
$$6 = 6(\ln 3) + b$$
$$b = 6 - 6\ln 3$$

y = 6x + 6 - 6 ln 3

Exemple 5 : Une biologiste étudie l'augmentation de la population d'un insecte particulier dans un parc provincial. La population triple chaque semaine. Suppose que la population continue d'augmenter à ce rythme. Initialement, il y a 100 insectes.

a) Détermine le nombre d'insectes présents après 4 semaines.

$$P(t) = 100(3)^t$$
$$P(4) = 100(3)^4$$
$$P(4) = 8100$$

b) À quelle vitesse le nombre d'insectes augmente-t-il

i) lorsqu'ils sont découverts initialement?

$$P'(t) = 100(3)^t \ln 3$$
$$P'(0) = 100(3)^0 \ln 3$$
$$P'(0) \cong 109.9$$

Au départ, elle augmente de 109,9 insectes par semaine

ii) à la fin de 4 semaines?

$$P'(4) = 100(3)^4 \ln 3$$
$$P'(4) \cong 8898.8 \text{ insectes par semaine}$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.