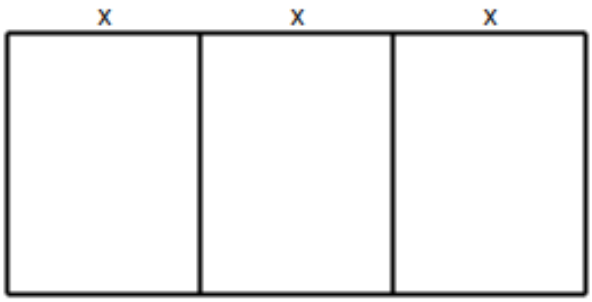
# 2.6 Fiche d'exercices sur les problèmes d'optimisation avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

**1)** Un enclos rectangulaire doit être construit avec 1200 m de clôture. L'enclos doit être divisé en trois parties à l'aide de deux cloisons parallèles. Trouvez l'aire maximale possible de l'enclos.




$$\text{largeur} = x$$
$$1200 = 4x + 2l$$
$$l = \frac{1200 - 4x}{2}$$
$$\text{longueur} = 600 - 2x$$
$$A(x) = x(600 - 2x)$$
$$A(x) = 600x - 2x^2$$

Points critiques :

$$A'(x) = 600 - 4x$$
$$0 = 600 - 4x$$
$$x = 150$$
$$A(150) = 45\,000 \text{ m}^2$$

**Critère de la dérivée seconde :**

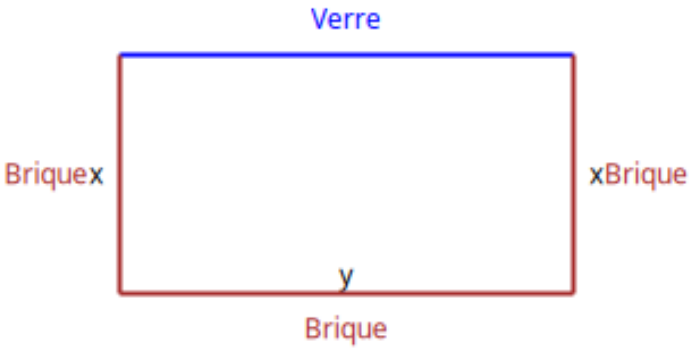
$$A''(x) = -4$$
$$A''(150) = -4; \text{ concave vers le bas}$$

Donc $(150,\ 45\,000)$ est un point maximum.

**L'aire max est de 45 000 m$^2$**

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés. 

**2)** Une salle d'exposition pour un concessionnaire automobile doit être construite en forme de rectangle avec de la brique à l'arrière et sur les côtés, et du verre à l'avant. Le plancher de la salle d'exposition doit avoir une aire de 500 m$^2$. Si un mur de brique coûte 1200 \$/m tandis qu'un mur de verre coûte 600 \$/m, quelles dimensions minimiseraient le coût de la salle d'exposition? Quel est le coût min?




$$xy = 500$$
$$y = \frac{500}{x}$$
$$C(x) = 600\left(\frac{500}{x}\right) + 1200\left(\frac{500}{x}\right) + 1200(2x)$$
$$C(x) = \frac{300\,000}{x} + \frac{600\,000}{x} + 2400x$$
$$C(x) = \frac{900\,000}{x} + 2400x$$

Points critiques :

$$C'(x) = -900\,000x^{-2} + 2400$$
$$0 = -\frac{900\,000}{x^2} + 2400$$
$$-2400x^2 = -900\,000$$
$$x^2 = 375$$
$$x \cong 19.36 \text{ m}$$
$$C(19.36) \cong 92\,951.6 \text{ dollars}$$

**Critère de la dérivée seconde :**

$$C''(x) = \frac{1\,800\,000}{x^3}$$
$$C''(19.36) \cong 248$$

Donc concave vers le haut et $(19.36,\ 92\,951.6)$ est un point MIN. Les dimensions qui donnent un coût min de 92 951,6 \$ sont 19,36 m par 25,83 m.

**3)** Une boîte de conserve doit avoir une capacité de 250 cm$^3$ et le diamètre de la boîte doit être d'au moins 4 cm et d'au plus 8 cm. Quelles sont les dimensions de la boîte qui peut être construite en utilisant le MOINS de matériau?

Domaine : $2 \leq r \leq 4$

$$SA = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$

De l'équation du volume :

$$V = \pi r^2 h$$
$$250 = \pi r^2 h$$
$$h = \frac{250}{\pi r^2}$$
$$SA(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{250}{\pi r^2}\right)$$
$$SA(r) = 2\pi r^2 + \frac{500}{r}$$
$$SA'(r) = 4\pi r - \frac{500}{r^2}$$
$$0 = 4\pi r - \frac{500}{r^2}$$
$$r^3 = \frac{500}{4\pi}$$
$$r = 3.41$$

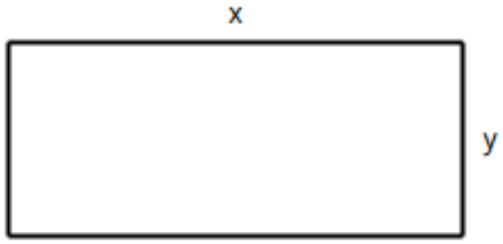
Testons les extrémités du domaine et le nombre critique :

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés. 

$$SA(2) = 275.1 \text{ cm}^2$$
$$SA(3.41) = 219.7 \text{ cm}^2$$
$$SA(4) = 225.5 \text{ cm}^2$$

Donc un rayon de 3,41 cm et une hauteur $= \frac{250}{\pi(3.41)^2} = 6.84$ cm minimiseront la quantité de matériau nécessaire pour fabriquer la boîte.

**4)** Une feuille de papier rectangulaire de périmètre 100 cm doit être roulée pour former un tube cylindrique. Trouvez les dimensions de la feuille qui produiront un tube de volume maximal. Quel est le volume max?




$$x = 2\pi r \qquad r = \frac{x}{2\pi}$$
$$100 = 2x + 2y$$
$$y = \frac{100 - 2x}{2} = 50 - x$$
$$V(x) = \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 (50 - x)$$
$$V(x) = \pi\left(\frac{x^2}{4\pi^2}\right)(50 - x)$$
$$V(x) = \frac{x^2}{4\pi}(50 - x)$$
$$V(x) = \frac{25}{\pi}x^2 - \frac{1}{4\pi}x^3$$

Points critiques :

$$V'(x) = \frac{25}{\pi}x - \frac{3}{4\pi}x^2$$
$$0 = x\left(\frac{25}{\pi} - \frac{3}{4\pi}x\right)$$
$$x_1 = 0$$
$$0 = \frac{25}{\pi} - \frac{3}{4\pi}x$$
$$\frac{3x}{4\pi} = \frac{25}{\pi}$$
$$3x = 100$$
$$x = \frac{100}{3}$$
$$V''(x) = \frac{25}{\pi} - \frac{3}{2\pi}x$$

$V''(0) = \frac{25}{\pi}$ ; concave vers le haut (min)

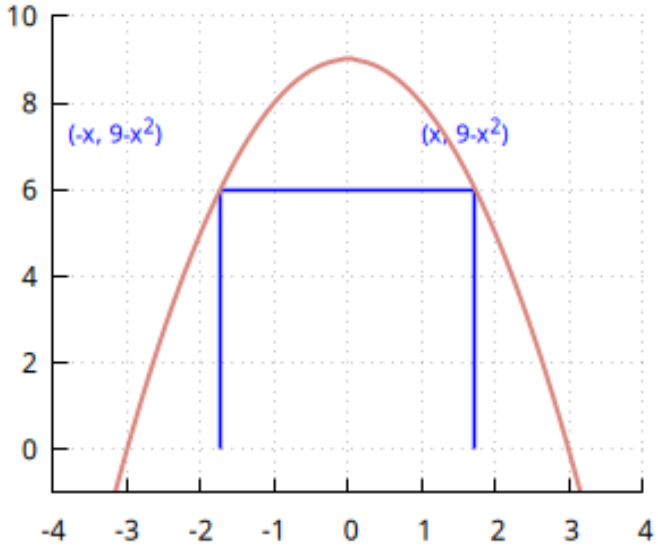
$V''\left(\frac{100}{3}\right) \cong -8$; concave vers le bas (max)

$$V\left(\frac{100}{3}\right) \cong 1473.66 \text{ cm}^3$$

Un volume max de 1473,66 cm$^3$ peut être obtenu avec une longueur de $\frac{100}{3}$ cm et une largeur de $\frac{50}{3}$ cm.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés. 

**5)** Trouvez l'aire du plus grand rectangle qui peut être inscrit entre l'axe des $x$ et le graphique défini par $y = 9 - x^2$.




$$A(x) = 2x(9 - x^2)$$
$$A(x) = 18x - 2x^3$$
$$A'(x) = 18 - 6x^2$$
$$0 = 18 - 6x^2$$
$$x^2 = 3$$
$$x = \pm\sqrt{3}$$

Impossible d'avoir $x < 0$

$$A(\sqrt{3}) \cong 20.78$$

**Critère de la dérivée seconde**

$$A''(x) = -12x$$
$$A''(\sqrt{3}) \cong -20.8; \text{ concave vers le bas (max)}$$

Donc $(\sqrt{3},\ 20.78)$ est un point maximum. L'aire max est d'environ 20,78 unités$^2$.

**6)** Pour un concert en plein air, un prix de billet de 30 $ attire habituellement 5000 personnes. Pour chaque augmentation de 1 $ du prix du billet, 100 personnes de moins assisteront au concert. Le revenu, $R$, est le produit du nombre de personnes présentes et du prix par billet. Soit $x$ le nombre d'augmentations de 1 $ du prix. Trouvez le prix du billet qui maximise le revenu. Quel est le revenu max?

$$R(x) = (30 + x)(5000 - 100x)$$
$$R'(x) = 1(5000 - 100x) + (-100)(30 + x)$$
$$R'(x) = 2000 - 200x$$
$$0 = 2000 - 200x$$
$$x = 10$$

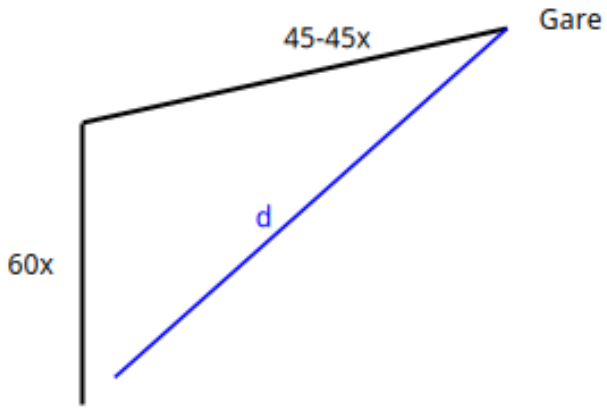
**Critère de la dérivée seconde :**

$$R''(x) = -200$$
$$R''(10) = -200; \text{ concave vers le bas}$$
$$R(10) = (30 + 10)(5000 - 100(10))$$
$$R(10) = (40)(4000)$$
$$R(10) = 160\,000$$

Un billet à 40 $ maximisera le revenu à 160 000 $.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés. 

**7)** Un train quitte la gare à 10 h 00 et se dirige vers le sud à une vitesse de 60 km/h. Un autre train se dirige vers l'ouest à 45 km/h et atteint la même gare à 11 h 00. À quel moment les deux trains étaient-ils le plus près l'un de l'autre?




$$d(x) = \sqrt{(45 - 45x)^2 + (60x)^2}$$
$$d(x) = (2025 - 4050x + 2025x^2 + 3600x^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$d(x) = (5625x^2 - 4050x + 2025)^{\frac{1}{2}}$$
$$d'(x) = \frac{1}{2}(5625x^2 - 4050x + 2025)^{-\frac{1}{2}}(11\,250x - 4050)$$
$$d'(x) = \frac{5625x - 2025}{\sqrt{5625x^2 - 4050x + 2025}}$$
$$0 = 5625x - 2025$$
$$x = 0.36$$

**Critère de la dérivée première :**

| | 0.36 | |
|---|---|---|
| $d'(x)$ | − | + |
| $d(x)$ | décroissante | croissante |

Donc ils sont le plus près l'un de l'autre 0,36 heure après 10 h 00 (10 h 22).

## Corrigé

**1)** 45 000 m$^2$

**2)** 19,4 m par 25,8 m; coût min est 92 952 $

**3)** $r = 3.41$ cm et $h = 6.83$ cm

**4)** $\frac{50}{3}$ cm par $\frac{100}{3}$ cm; le volume est 1473,7 cm$^3$

**5)** $12\sqrt{3}$ unités$^2$

**6)** 40 $; revenu max est 160 000 $

**7)** 0,36 heure après que le premier train a quitté la gare (10 h 22)

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés. 