2.5 Fiche d'exercices sur l'esquisse de courbes avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

1) Pour chaque fonction, déterminez les coordonnées des extremums locaux. Classifiez chaque point comme un maximum ou un minimum local.

a) $y = 2x - 3x^2$

$$y' = 2 - 6x$$
$$0 = 2 - 6x$$
$$x = \frac{1}{3}$$
$$y\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

Point critique : $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$

Critère de la dérivée seconde :

$$y'' = -6$$

$y''\left(\frac{1}{3}\right) = -6$; concave vers le bas

$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ est un MAXIMUM local

b) $y = 2t^3 + 6t^2 + 6t + 4$

$$y' = 6t^2 + 12t + 6$$
$$0 = 6(t^2 + 2t + 1)$$
$$0 = 6(t + 1)^2$$

NC : $t = -1$

PC : $(-1, 2)$

2e critère :

$$y'' = 12t + 12$$
$$y''(-1) = 0$$

Donc le 2e critère échoue; vérifions le 1er critère.

Test	-2	0
y'	+	+
y	croiss.	croiss.

$(-1, 2)$ n'est PAS un maximum ou un minimum local

2) Pour chaque fonction, déterminez les coordonnées de tout point d'inflexion.

a) $f(x) = 2x^3 - 4x^2$

$$f'(x) = 6x^2 - 8x$$
$$f''(x) = 12x - 8$$
$$0 = 12x - 8$$
$$x = \frac{2}{3}$$
$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{32}{27}$$

PI possible : $\left(\frac{2}{3}, -\frac{32}{27}\right)$

Test	0	1
$f''(x)$	−	+
$F(x)$	con. bas	con. haut

PI : $\left(\frac{2}{3}, -\frac{32}{27}\right)$

b) $f(x) = 3x^5 - 5x^4 - 40x^3 + 120x^2$

$$f'(x) = 15x^4 - 20x^3 - 120x^2 + 240x$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 - 240x + 240$$
$$0 = 60(x^3 - x^2 - 4x + 4)$$
$$0 = x^2(x-1) - 4(x-1)$$
$$0 = (x-1)(x^2-4)$$
$$0 = (x-1)(x-2)(x+2)$$

$x_1 = 1 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = -2$

$$f(1) = 78 \qquad f(2) = 176 \qquad f(-2) = 624$$

Test	-3	0	1.5	3
$f''(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
$F(x)$	bas	haut	bas	haut

PI : $(-2, 624)$, $(1, 78)$, et $(2, 176)$

3) Utilisez l'algorithme pour l'esquisse de courbes pour analyser les caractéristiques clés de chacune des fonctions suivantes et pour en esquisser un graphique.

a) $f(x) = x^4 - 8x^3$

1. Aucune restriction de domaine; aucune asymptote

2.

$$0 = x^3(x-8)$$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 8$

Abscisses à l'origine : $(0, 0)$, $(8, 0)$

$f(0) = 0$

Ordonnée à l'origine : $(0, 0)$

3.

$$f'(x) = 4x^3 - 24x^2$$
$$0 = 4x^2(x-6)$$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 6$

$f(0) = 0 \qquad f(6) = -432$

Points critiques : $(0, 0)$, $(6, -432)$

4.

$$f''(x) = 12x^2 - 48x$$
$$0 = 12x(x-4)$$

$x_1 = 0 \qquad x_2 = 4$

$f(0) = 0 \qquad f(4) = -256$

Points d'inflexion possibles : $(0, 0)$, $(4, -256)$

5/6.

Test	-1	1	5	7
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$	$+$
$F(x)$	Cc haut Décroissante	Cc bas Décroissante	Cc haut Décroissante	Cc haut Croissante

PI, PI, minimum local

Croissante : $x > 6$

Décroissante : $x < 6$

7.

Minimum local : $(6, -432)$

Maximum local : AUCUN

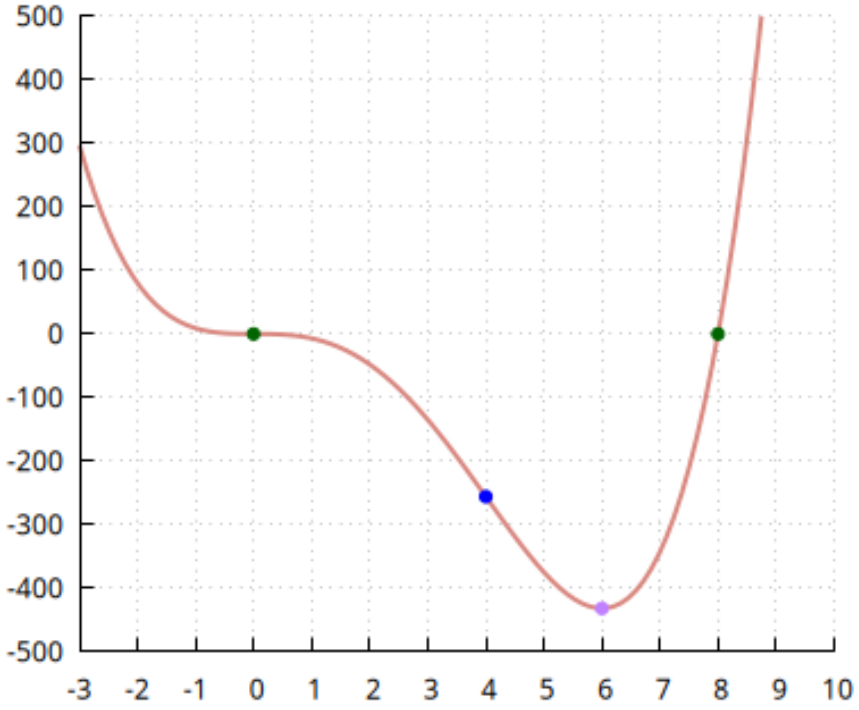
Points d'inflexion : $(0, 0)$ et $(4, -256)$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

C.H. : $x < 0,\ x > 4$

C.B. : $0 < x < 4$

8.



b) $g(x) = 3x^3 + 7x^2 + 3x - 1$

1. Aucune restriction sur le domaine; aucune asymptote

2.

Test : $g(-1) = 0$, donc $x + 1$ est un facteur

$$\begin{array}{rrrrr} & -1 & 3 & 7 & 3 & -1 \\ & & & -3 & -4 & 1 \\ & & 3 & 4 & -1 & 0 \end{array}$$

$$0 = (x + 1)(3x^2 + 4x - 1)$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{(4)^2 - 4(3)(-1)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{28}}{6}$$

$x_1 = -1 \qquad x_2 \cong 0.215 \qquad x_3 \cong -1.549$

Abscisses à l'origine : $(-1,\ 0),\ (0.215,\ 0)$, et $(-1.549,\ 0)$

$g(0) = -1$

Ordonnée à l'origine : $(0,\ -1)$

3.

$$g'(x) = 9x^2 + 14x + 3$$

$$0 = 9x^2 + 14x + 3$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{(14)^2 - 4(9)(3)}}{2(9)}$$

$$x = \frac{-14 \pm \sqrt{88}}{18}$$

$x_1 \cong -0.26 \qquad x_2 \cong -1.30$

$g(-0.26) = -1.36 \qquad g(-1.3) = 0.34$

Points critiques : $(-0.26,\ -1.36),\ (-1.3,\ 0.34)$

4.

$$g''(x) = 18x + 14$$

$$0 = 18x + 14$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$$x = -\frac{7}{9} \cong -0.78$$
$$g\left(-\frac{7}{9}\right) = -\frac{124}{243} \cong -0.51$$

PI possible : $(-0.78, -0.51)$

5/6.

Test	-2	-1	-0.5	0
$g'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$g''(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$
$g(x)$	Cc bas Croissante	Cc bas Décroissante	Cc haut Décroissante	Cc haut Croissante

maximum local, PI, minimum local

Croissante : $x < -1.3,\ x > -0.26$

Décroissante : $-1.3 < x < -0.26$

7.

Minimum local : $(-0.26, -1.36)$

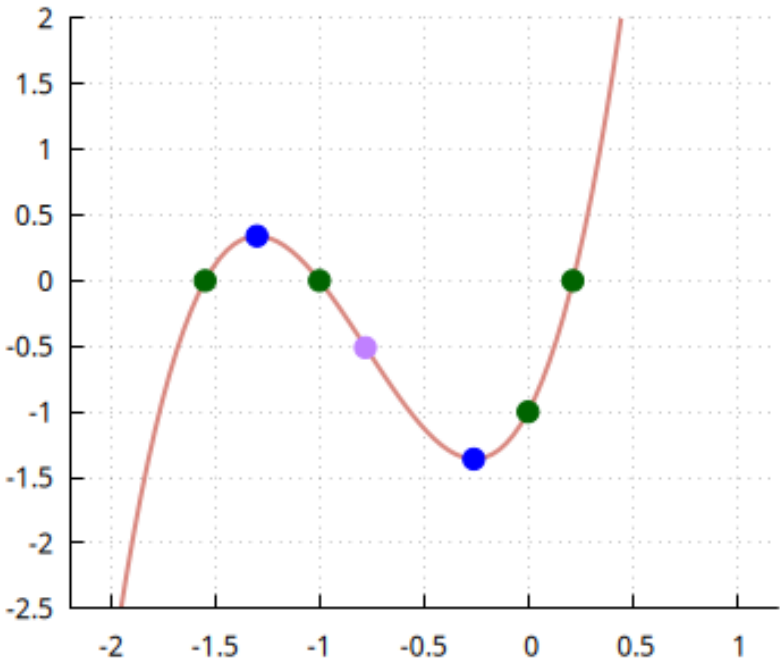
Maximum local : $(-1.3, 0.34)$

Point d'inflexion : $(-0.78, -0.51)$

C.H. : $x > -0.78$

C.B. : $x < -0.78$

8.



c) $h(x) = 2x^4 - 26x^2 + 72$

1. Aucune restriction; aucune asymptote

2.

$$0 = 2x^4 - 26x^2 + 72$$
$$0 = x^4 - 13x^2 + 36$$
$$0 = (x^2 - 9)(x^2 - 4)$$
$$0 = (x - 3)(x + 3)(x - 2)(x + 2)$$

$x_1 = -3 \qquad x_2 = -2 \qquad x_3 = 2 \qquad x_4 = 3$

Abscisses à l'origine : $(-3, 0), (-2, 0), (2, 0), (3, 0)$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$h(0) = 72$

Ordonnée à l'origine : $(0,\ 72)$

3.

$$h'(x) = 8x^3 - 52x$$
$$0 = 4x(2x^2 - 13)$$

$x_1 = 0 \qquad 2x^2 - 13 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{6.5}$

$h(0) = 72$

$x_2 \cong 2.55 \qquad x_3 \cong -2.55$

$h(2.55) \cong -12.5 \qquad h(-2.55) \cong -12.5$

Points critiques : $(0,\ 72),\ (2.55,\ -12.5),\ (-2.55,\ -12.5)$

4.

$$h''(x) = 24x^2 - 52$$
$$0 = 24x^2 - 52$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{13}{6}}$$

$x_1 \cong 1.47 \qquad x_2 \cong -1.47$

$h(1.47) \cong 25.16 \qquad h(-1.47) \cong 25.16$

PI possibles : $(1.47,\ 25.16),\ (-1.47,\ 25.16)$

5/6.

Test	-3	-2	-1	1	2	3
$h'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$h''(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$h(x)$	CH déc.	CH croi.	CB croi.	CB déc.	CH déc.	CH croi.

min, PI, max, PI, min

Croissante : $-2.55 < x < 0,\ x > 2.55$

Décroissante : $x < -2.55,\ 0 < x < 2.55$

7.

Minimums locaux : $(-2.55,\ -12.5)$ et $(2.55,\ -12.5)$

Maximum local : $(0,\ 72)$

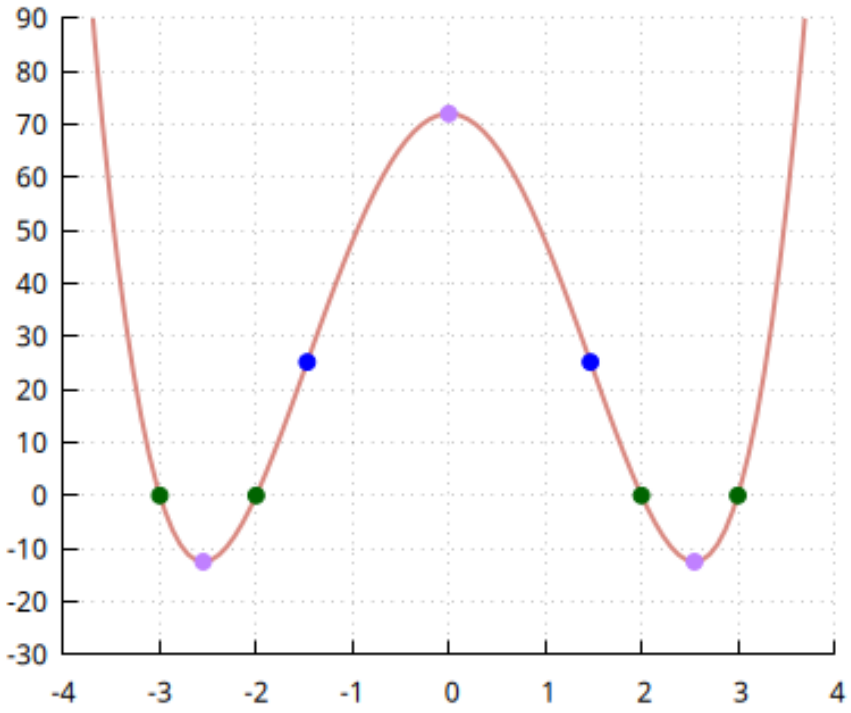
PI : $(-1.47,\ 25.16)$ et $(1.47,\ 25.16)$

C.H. : $x < -1.47,\ x > 1.47$

C.B. : $-1.47 < x < 1.47$

8.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



d) $j(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{x^2}$

1. $x \neq 0$; AV en $x = 0$

AH en $y = 1$

2.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2}$$
$$x = -1 \pm \sqrt{5}$$

$(1.24,\ 0)$ et $(-3.24,\ 0)$

Ordonnée à l'origine : $j(0) = -\frac{4}{0}$ est indéfinie, donc aucune ordonnée à l'origine.

3.

$$j'(x) = \frac{(2x+2)(x^2) - 2x(x^2 + 2x - 4)}{x^4}$$
$$j'(x) = \frac{x\left[(2x+2)(x) - 2(x^2 + 2x - 4)\right]}{x^4}$$
$$j'(x) = \frac{2x^2 + 2x - 2x^2 - 4x + 8}{x^3}$$
$$j'(x) = \frac{-2x + 8}{x^3}$$
$$0 = -2x + 8$$
$$x = 4$$

$x = 0$ n'est pas un nombre critique car il n'est PAS dans le domaine de $j'(x)$

$j(4) = 1.25$

NC : $(4,\ 1.25)$

4.

$$j''(x) = \frac{-2(x^3) - 3x^2(-2x + 8)}{x^6}$$
$$j''(x) = \frac{-2x^3 + 6x^3 - 24x^2}{x^6}$$
$$j''(x) = \frac{4x^3 - 24x^2}{x^6}$$
$$j''(x) = \frac{4x^2(x - 6)}{x^6}$$
$$j''(x) = \frac{4(x - 6)}{x^4}$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$$0 = 4(x-6)$$
$$x = 6$$

$j(6) = 1.22$

PI possible est $(6,\ 1.22)$

5/6.

Test	-1	1	5	7
$j'(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$
$j''(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$j(x)$	CB décroissante	CB croissante	CB décroissante	CH décroissante

AV, Max, PI

Croissante : $0 < x < 4$

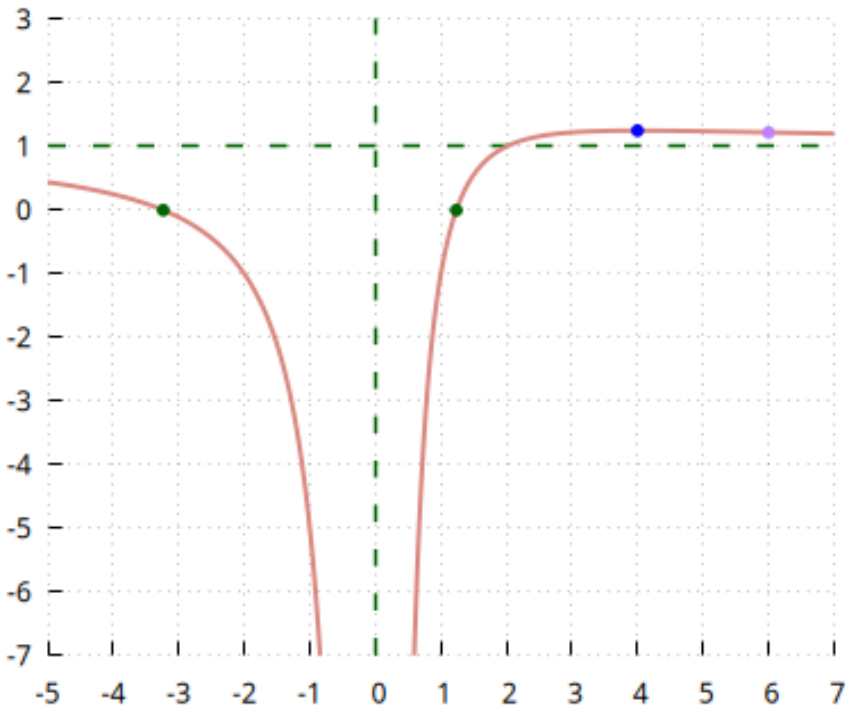
Décroissante : $x < 0,\ x > 4$

7.

C.H. : $x > 6$

C.B. : $x < 0,\ 0 < x < 6$

8.



Corrigé

1) a) max : $\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ b) aucun extremum local; $(-1,\ 2)$ est un point d'inflexion et NON un maximum ou un minimum

2) a) $\left(\frac{2}{3},\ -\frac{32}{27}\right)$ b) $(-2,\ 624)$, $(2,\ 176)$, et $(0,\ 0)$

3) a) abscisses à l'origine : $(0,\ 0)$ et $(8,\ 0)$; ordonnée à l'origine : $(0,\ 0)$; maximum local : aucun; minimum local : $(6,\ -432)$; PI : $(0,\ 0)$ et $(4,\ -256)$; croissante : $x > 6$; décroissante : $x < 0$ et $0 < x < 6$; concave vers le haut : $x < 0$ et $x > 4$; concave vers le bas : $0 < x < 4$

b) abscisses à l'origine : $(-1,\ 0)$, $(0.215,\ 0)$, et $(-1.549,\ 0)$; ordonnée à l'origine : $(0,\ -1)$; maximum local : $(-1.3,\ 0.34)$; minimum local : $(-0.26,\ -1.36)$; PI : $(-0.78,\ -0.51)$; croissante : $x < -1.3$ et $x > -0.26$; décroissante : $-1.3 < x < -0.26$; concave vers le haut : $x > -0.78$; concave vers le bas : $x < -0.78$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

c) abscisses à l'origine : $(-3, 0)$, $(-2, 0)$, $(2, 0)$ et $(3, 0)$; ordonnée à l'origine : $(0, 72)$; maximum local : $(0, 72)$; minimum local : $(-2.55, -12.5)$ et $(2.55, -12.5)$; PI : $(-1.47, 25.16)$ et $(1.47, 25.16)$; croissante : $-2.55 < x < 0$ et $x > 2.55$; décroissante : $x < -2.55$ et $0 < x < 2.55$; concave vers le haut : $x < -1.47$ et $x > 1.47$; concave vers le bas : $-1.47 < x < 1.47$

d) AV : $x = 0$; AH : $y = 1$; abscisses à l'origine : $(-3.24, 0)$, et $(1.24, 0)$; ordonnée à l'origine : aucune; maximum local : $(4, 1.25)$; minimum local : aucun; PI : $(6, 1.22)$; croissante : $0 < x < 4$; décroissante : $x < 0$, et $x > 4$; concave vers le haut : $x > 6$; concave vers le bas : $x < 0$ et $0 < x < 6$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.