2.4 Fiche d'exercices sur les fonctions rationnelles avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

1) Trouvez l'équation de toute asymptote pour les fonctions suivantes. Ensuite, trouvez les limites unilatérales qui approchent les asymptotes verticales.

a) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4} = \dfrac{x+3}{(x-2)(x+2)}$

AH : $y = 0$

AV : $x = 2,\ x = -2$

Tests : $f(1.99) \cong -125$ $f(2.01) \cong 125$ $f(-1.99) \cong -25$ $f(-2.01) \cong 25$

Limites :

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$$
$$\lim_{x\to -2^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$$

b) $y = \dfrac{x^2}{x^2-3x+2} = \dfrac{x^2}{(x-2)(x-1)}$

AH : $y = 1$

AV : $x = 2,\ x = 1$

Tests : $y(1.99) \cong -400$ $y(2.01) \cong 400$ $y(0.99) \cong 97$ $y(1.01) \cong -103$

Limites :

$$\lim_{x\to 2^+} y = \infty \qquad \lim_{x\to 2^-} y = -\infty$$
$$\lim_{x\to 1^+} y = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^-} y = \infty$$

c) $y = 2x + \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2+1}{x}$

AO : $y = 2x$

AV : $x = 0$

Tests : $y(-0.01) \cong -100$ $y(0.01) \cong 100$

Limites :

$$\lim_{x\to 0^+} y = \infty \qquad \lim_{x\to 0^-} y = -\infty$$

d) $g(x) = \dfrac{2x-3}{x^2-6x+9} = \dfrac{2x-3}{(x-3)^2}$

AH : $y = 0$

AV : $x = 3$

Tests : $g(2.99) = 29\,800$ $g(3.01) = 30\,200$

Limites :

$$\lim_{x\to 3^+} g(x) = \infty \qquad \lim_{x\to 3^-} g(x) = \infty$$

2) Trouvez la dérivée de chaque fonction. Ensuite, déterminez si la fonction a des extremums locaux.

a) $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$

$$f'(x) = \frac{0(x+3) - 1(2)}{(x+3)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-2}{(x+3)^2}$$

Aucun point critique puisque $f'(x) \neq 0$ et $x = -3$ n'est pas dans le domaine de $f(x)$. Donc aucun extremum local.

b) $h(x) = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$

$$h'(x) = \frac{0(x-2)^2 - 2(x-2)(1)(-3)}{\left[(x-2)^2\right]^2}$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$$h'(x) = \frac{6(x-2)}{(x-2)^4}$$
$$h'(x) = \frac{6}{(x-2)^3}$$

$h'(x) \neq 0$ et $x = 2$ n'est pas dans le domaine de $h(x)$. Donc aucun point critique et aucun extremum local.

3) Considérez la fonction $f(x) = \frac{-2}{(x+1)^2}$ AV : $x = -1$

a) Trouvez les intervalles de croissance et de décroissance pour $f(x)$.

$$f'(x) = \frac{0(x+1)^2 - 2(x+1)(1)(-2)}{(x+1)^4}$$
$$f'(x) = \frac{4(x+1)}{(x+1)^4}$$
$$f'(x) = \frac{4}{(x+1)^3}$$

Aucun point critique. N'utilisez l'AV comme point de partage que lors du test.

Test	-2		0
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	décroiss.		croiss.

Croissante : $x > -1$

Décroissante : $x < -1$

b) Trouvez les intervalles de concavité pour $f(x)$.

$$f''(x) = \frac{0(x+1)^3 - 3(x+1)^2(1)(4)}{(x+1)^6}$$
$$f''(x) = \frac{-12(x+1)^2}{(x+1)^6}$$
$$f''(x) = \frac{-12}{(x+1)^4}$$

$f''(x) \neq 0$. Le seul changement possible de concavité est à l'AV.

Test	-2		0
$f''(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	con. bas		con. bas

Concave vers le bas : $x < -1,\ x > -1$

Concave vers le haut : jamais

4) Considérez la fonction $h(x) = \frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)}$

a) Écrivez les équations des asymptotes

AH : $y = 0$

AV : $x = 2,\ x = -2$

b) Construisez un tableau montrant les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction

$$h'(x) = \frac{0(x^2-4) - 2x(1)}{(x^2-4)^2}$$
$$h'(x) = \frac{-2x}{(x^2-4)^2}$$
$$0 = -2x$$
$$x = 0$$
$$h(0) = -0.25$$

Point critique $(0, -0.25)$

Test	-3	-1	1	3
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$F(x)$	croiss.	croiss.	décroiss.	décroiss.

Croissante : $x < -2,\ -2 < x < 0$

Décroissante : $0 < x < 2,\ x > 2$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

c) Comment pouvez-vous utiliser le tableau de la partie b) pour déterminer le comportement de $f(x)$ près des asymptotes verticales?

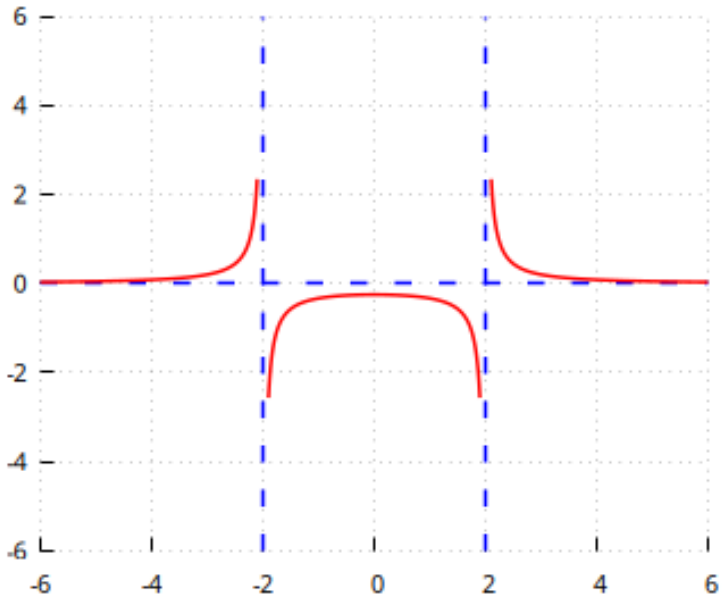
Puisque la courbe est croissante à gauche de $x = -2$, $\lim_{x\to -2^-} h(x) = \infty$

Puisque la courbe est croissante à droite de $x = -2$, $\lim_{x\to -2^+} h(x) = -\infty$

Puisque la courbe est décroissante à gauche de $x = 2$, $\lim_{x\to 2^-} h(x) = -\infty$

Puisque la courbe est décroissante à droite de $x = 2$, $\lim_{x\to 2^+} h(x) = \infty$

d) Esquissez un graphique de la fonction.



Corrigé

1) a) AV : $x = 2$ et $x = -2$; AH : $y = 0$; $\lim_{x\to 2^+} = \infty$, $\lim_{x\to 2^-} = -\infty$, $\lim_{x\to -2^+} = -\infty$, $\lim_{x\to -2^-} = \infty$

b) AV : $x = 1$ et $x = 2$; AH : $y = 1$; $\lim_{x\to 2^+} = \infty$, $\lim_{x\to 2^-} = -\infty$, $\lim_{x\to 1^+} = -\infty$, $\lim_{x\to 1^-} = \infty$

c) AV : $x = 0$; AO : $y = 2x$; $\lim_{x\to 0^+} = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} = -\infty$

d) AV : $x = 3$; AH : $y = 0$; $\lim_{x\to 3^+} = \infty$, $\lim_{x\to 3^-} = \infty$

2) a) $f'(x) = \frac{-2}{(x+3)^2}$; aucun extremum local b) $h'(x) = \frac{6}{(x-2)^3}$; aucun extremum local

3) a) décroissante lorsque $x < -1$, croissante lorsque $x > -1$ b) concave vers le bas lorsque $x < -1$ ou $x > -1$

4) a) AV : $x = 2$ et $x = -2$; AH : $y = 0$ b) croissante lorsque $x < -2$ ou $-2 < x < 0$; décroissante lorsque $0 < x < 2$ ou $x > 2$ c) Puisque la courbe est croissante à gauche de $x = -2$, $\lim_{x\to -2^-} = \infty$ Puisque la courbe est croissante à droite de $x = -2$, $\lim_{x\to -2^+} = -\infty$ Puisque la courbe est décroissante à gauche de $x = 2$, $\lim_{x\to 2^-} = -\infty$ Puisque la courbe est décroissante à droite de $x = 2$, $\lim_{x\to 2^+} = \infty$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.