2.6 Leçon sur les problèmes d'optimisation avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Astuces pour les problèmes d'optimisation :

- Les diagrammes peuvent être utiles
- Identifiez la variable indépendante et exprimez toutes les autres variables en fonction de celle-ci
- Définissez une fonction en fonction de la variable indépendante
- Identifiez toute restriction sur la variable
- Résolvez $f'(x) = 0$ pour identifier les points critiques
- Vérifiez les points critiques et les extrémités

Échauffement d'optimisation :

Une sauveteuse dispose de 200 mètres de corde et de quelques bouées avec lesquelles elle a l'intention d'enclore une aire rectangulaire sur une plage pour la baignade. La plage formera un côté du rectangle, la corde formant les 3 autres côtés. Trouvez les dimensions qui produiront l'aire maximale.

$$\text{largeur} = x$$
$$\text{longueur} = 200 - 2x$$
$$A = (\text{longueur})(\text{largeur})$$
$$A = x(200 - 2x)$$
$$A = 200x - 2x^2$$

Remarque : Le domaine de cette fonction est restreint aux valeurs $0 < x < 100$ car il n'y a que 200 mètres de corde à utiliser.

Pour déterminer l'aire max, testez les extrémités de l'intervalle ainsi que tout nombre critique.

Nombre(s) critique(s) :

$$A'(x) = 200 - 4x$$
$$0 = 200 - 4x$$
$$4x = 200$$
$$x = 50 \text{ est un nombre critique}$$

Tests :

$$A(0) = 0[200 - 2(0)]$$
$$A(0) = 0 \text{ m}^2$$
$$A(50) = 50[200 - 2(50)]$$
$$A(50) = 5000 \text{ m}^2$$
$$A(100) = 100[200 - 2(100)]$$
$$A(100) = 0 \text{ m}^2$$

Donc, l'aire max de 5000 m^2 survient lorsque la largeur est de 50 m et la longueur de 100 m.

Exemple 1 : Une boîte en carton à base carrée doit avoir un volume de 8 litres (1 L = 1000 cm^3). Trouvez les dimensions qui minimiseront la quantité de carton utilisée. Quelle est l'aire de surface minimale?

$$SA = 2x^2 + 4xh$$

De l'équation du volume :

$$V = (\text{aire de la base})(\text{hauteur})$$
$$8000 = x^2h$$
$$h = \frac{8000}{x^2}$$

Exprimons h en fonction de x à l'aide de l'équation du volume

$$SA = 2x^2 + 4x\left(\frac{8000}{x^2}\right)$$
$$SA = 2x^2 + 32000x^{-1}$$

Trouvons la valeur min en trouvant le ou les zéros de la dérivée première :

$$SA'(x) = 4x - 32000x^{-2}$$
$$0 = 4x - 32000x^{-2}$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$$32000x^{-2} = 4x$$
$$32000 = 4x^3$$
$$8000 = x^3$$
$$x = 20 \text{ cm}$$

Vérifions qu'il s'agit d'un min à l'aide du critère de la dérivée seconde :

$$SA''(x) = 4 + 64000x^{-3}$$
$$SA''(20) = 4 + 64000(20)^{-3}$$
$$SA''(20) = 12, \text{ donc } SA \text{ est concave vers le haut en } x = 20, \text{ et il y a un minimum local.}$$

Résolvons pour h lorsque $x = 20$:

$$h = \frac{8000}{(20)^2}$$
$$h = 20$$

Trouvons l'aire de surface minimale :

$$SA(20) = 2(20)^2 + 32000(20)^{-1}$$
$$SA(20) = 2400 \text{ cm}^2$$

Donc, une aire de surface minimale de 2400 cm^2 peut être obtenue lorsque les dimensions de la boîte sont 20 par 20 par 20 cm.

Exemple 2 : Une boîte de conserve d'un volume de 500 cm^3 doit être construite. Le matériau pour le dessus coûte 0,4¢/cm^2 tandis que le matériau pour le dessous et les côtés coûte 0,2¢/cm^2. Trouvez les dimensions qui minimiseront le coût de production de la boîte. Quel est le coût min?

$$SA = 2\pi r^2 + 2\pi rh$$
$$SA = \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi rh$$

De l'équation du volume :

$$V = \pi r^2 h$$
$$500 = \pi r^2 h$$
$$h = \frac{500}{\pi r^2}$$
$$SA(r) = \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{500}{\pi r^2}\right)$$
$$SA(r) = \pi r^2 + \pi r^2 + \frac{1000}{r}$$
$$C(r) = 0.4(\pi r^2) + 0.2(\pi r^2) + 0.2\left(\frac{1000}{r}\right)$$
$$C(r) = 0.6\pi r^2 + \frac{200}{r}$$
$$C'(r) = 1.2\pi r - \frac{200}{r^2}$$
$$0 = 1.2\pi r - \frac{200}{r^2}$$
$$\frac{200}{r^2} = 1.2\pi r$$
$$\frac{200}{1.2\pi} = r^3$$
$$r = \sqrt[3]{\frac{200}{1.2\pi}}$$
$$r = 3.76 \text{ cm}$$

Critère de la dérivée seconde

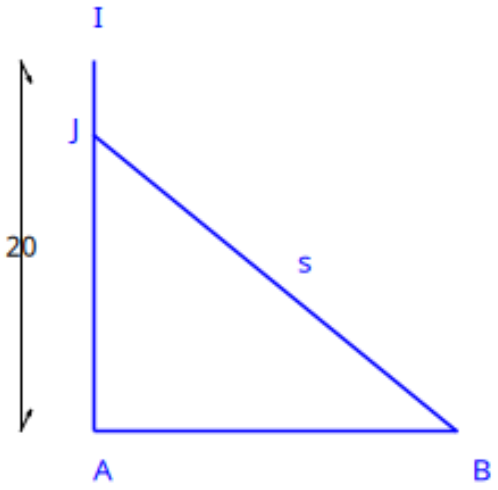
$$C''(r) = 1.2\pi + \frac{400}{r^3}$$
$$C''(3.76) = 11.29; \text{ donc au point } (3.76,\ C(3.76)),\ C(r) \text{ est concave vers le haut et le point est un MIN.}$$
$$C(3.76) = 79.84 \text{ cents}$$

Un coût min de 79,84 cents peut être obtenu en utilisant les dimensions $r = 3.76$ cm et $h = \frac{500}{\pi(3.76)^2} = 11.26$ cm

Exemple 3 : Ian et Ada s'entraînent tous les deux pour un marathon. La maison d'Ian est située à 20 km au nord de celle d'Ada. À 9 h 00 un samedi, Ian quitte sa maison et court vers le sud à 8 km/h. En même temps, Ada quitte sa maison et court vers l'est à 6 km/h. Quand Ian et Ada sont-ils le plus près l'un de l'autre, étant donné qu'ils courent tous les deux pendant 2,5 heures?

$$s^2 = JA^2 + AB^2$$
$$s = \sqrt{JA^2 + AB^2}$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



Exprimons s en fonction du temps (t)

$$JA = 20 - 8t$$
$$AB = 6t$$
$$s = \sqrt{(20 - 8t)^2 + (6t)^2}$$
$$s = \left[400 - 320t + 64t^2 + 36t^2\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$s = \left(100t^2 - 320t + 400\right)^{\frac{1}{2}}$$

Trouvons le ou les nombres critiques :

$$s'(t) = \frac{1}{2}\left(100t^2 - 320t + 400\right)^{-\frac{1}{2}}(200t - 320)$$
$$s'(t) = \frac{200t - 320}{2\sqrt{100t^2 - 320t + 400}}$$
$$s'(t) = \frac{100t - 160}{\sqrt{100t^2 - 320t + 400}}$$
$$0 = \frac{100t - 160}{\sqrt{100t^2 - 320t + 400}}$$
$$0 = 100t - 160$$
$$160 = 100t$$
$$t = 1.6$$

Vérifions les extrémités de l'intervalle et le nombre critique pour déterminer la valeur minimale :

$$s(0) = \sqrt{[20 - 8(0)]^2 + [6(0)]^2} = 20$$
$$s(1.6) = \sqrt{[20 - 8(1.6)]^2 + [6(1.6)]^2} = 12$$
$$s(2.5) = \sqrt{[20 - 8(2.5)]^2 + [6(2.5)]^2} = 15$$

Donc, la distance minimale entre Ada et Ian survient après 1,6 heure (10 h 36).

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.