2.5 Leçon sur l'esquisse de courbes avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Algorithme pour l'esquisse de courbes

1. Déterminez toute restriction du domaine. Indiquez toute asymptote horizontale et verticale ou tout trou dans le graphique.
2. Déterminez les abscisses et l'ordonnée à l'origine du graphique
3. Déterminez les nombres critiques de la fonction (où $f'(x) = 0$ ou n'existe pas)
4. Déterminez les points d'inflexion possibles (où $f''(x) = 0$ ou n'existe pas)
5. Créez un tableau de signes qui utilise les nombres critiques, les points d'inflexion possibles, et les asymptotes verticales comme points de partage.
6. Utilisez le tableau de signes pour trouver les intervalles de croissance/décroissance et les intervalles de concavité. Utilisez tous les nombres critiques, points d'inflexion possibles, et asymptotes verticales comme points de partage.
7. Identifiez les extremums locaux et les points d'inflexion
8. Esquissez la fonction

Exemple 1 : Utilisez l'algorithme pour l'esquisse de courbes pour analyser les caractéristiques clés de chacune des fonctions suivantes et pour en esquisser un graphique.

a) $g(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$

1. Aucune restriction sur le domaine; aucune asymptote

2. Abscisses à l'origine :

$$0 = x^3 + 6x^2 + 9x$$
$$0 = x(x^2 + 6x + 9)$$
$$0 = x(x + 3)^2$$

$x = 0$ ou $x = -3$

$(0, 0)$ et $(-3, 0)$ sont des abscisses à l'origine

Ordonnée à l'origine :

$$g(0) = 0$$

$(0, 0)$ est l'ordonnée à l'origine

3.

$$g'(x) = 3x^2 + 12x + 9$$
$$0 = 3(x^2 + 4x + 3)$$
$$0 = 3(x + 3)(x + 1)$$

Nombres critiques : $x = -3$ et $x = -1$

Points critiques : $(-3, 0)$ et $(-1, -4)$

4.

$$g''(x) = 6x + 12$$
$$0 = 6(x + 2)$$
$$x = -2$$

$(-2, -2)$ est un point d'inflexion possible

5/6/7.

Valeur test pour x	-4	-2.5	-1.5	0
$g'(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$g''(x)$	$-$	$-$	$+$	$+$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

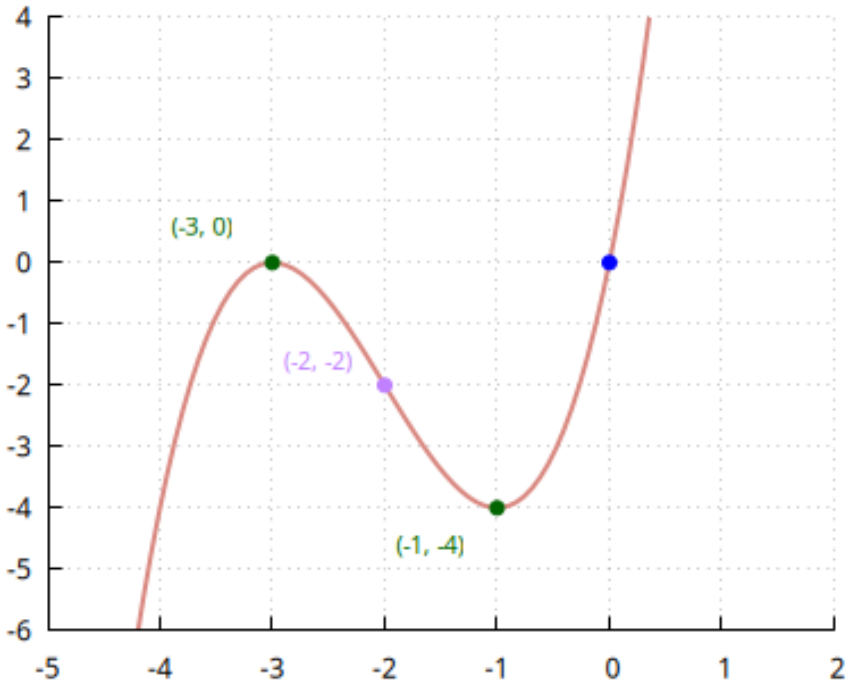
$g(x)$	Concave vers le bas, Croissante	Concave vers le bas, Décroissante	Concave vers le haut, Décroissante	Concave vers le haut, Croissante

Maximum local en $(-3, 0)$

PI en $(-2, -2)$

Minimum local en $(-1, -4)$

8.



b) $f(x) = \frac{1}{(x+1)(x-4)} = \frac{1}{x^2-3x-4}$

1. AV : $x = -1$ et $x = 4$ (restrictions du dénominateur)

AH : $y = 0$ (degré du dénominateur supérieur au degré du numérateur)

2. Abscisse à l'origine : AUCUNE

Ordonnée à l'origine : $f(0) = \frac{1}{(0+1)(0-4)} = -\frac{1}{4}$ $(0, -0.25)$

3.

$$f'(x) = \frac{0(x+1)(x-4) - (2x-3)(1)}{(x^2-3x-4)^2}$$
$$f'(x) = \frac{-2x+3}{(x^2-3x-4)^2}$$

Vérifions les zéros :

$$0 = -2x + 3$$
$$x = \frac{3}{2} = 1.5$$

Vérifions les restrictions :

$$0 = (x^2-3x-4)^2$$
$$0 = [(x-4)(x+1)]^2$$
$$x = 4 \text{ et } x = -1$$

Cependant, ces valeurs ne sont pas dans le domaine de $f(x)$, donc ne sont PAS des nombres critiques

Nombre critique : $x = \frac{3}{2} = 1.5$

Point critique : $f(1.5) = -0.16$ $(1.5, -0.16)$

4.

$$f''(x) = \frac{-2(x^2-3x-4)^2 - 2(x^2-3x-4)(2x-3)(-2x+3)}{(x^2-3x-4)^4}$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$$f''(x) = \frac{(x^2-3x-4)\left[-2(x^2-3x-4)-2(2x-3)(-2x+3)\right]}{(x^2-3x-4)^4}$$
$$f''(x) = \frac{-2(x^2-3x-4)-2(2x-3)(-2x+3)}{(x^2-3x-4)^3}$$
$$f''(x) = \frac{-2x^2+6x+8-2(-4x^2+12x-9)}{(x^2-3x-4)^3}$$
$$f''(x) = \frac{-2x^2+6x+8+8x^2-24x+18}{(x^2-3x-4)^3}$$
$$f''(x) = \frac{6x^2-18x+26}{(x^2-3x-4)^3}$$

Des changements de concavité sont possibles en $x=-1$ et $x=4$, mais $f(x)$ n'est pas défini à ces valeurs non plus, donc ils ne peuvent PAS être considérés comme des points d'inflexion.

Vérifions les zéros :

$$0 = 6x^2-18x+26$$
$$b^2-4ac = (-18)^2-4(6)(26) = -300$$

$b^2-4ac<0$ donc aucune solution réelle

$f(x)$ n'a pas de point d'inflexion

Vérifions les restrictions :

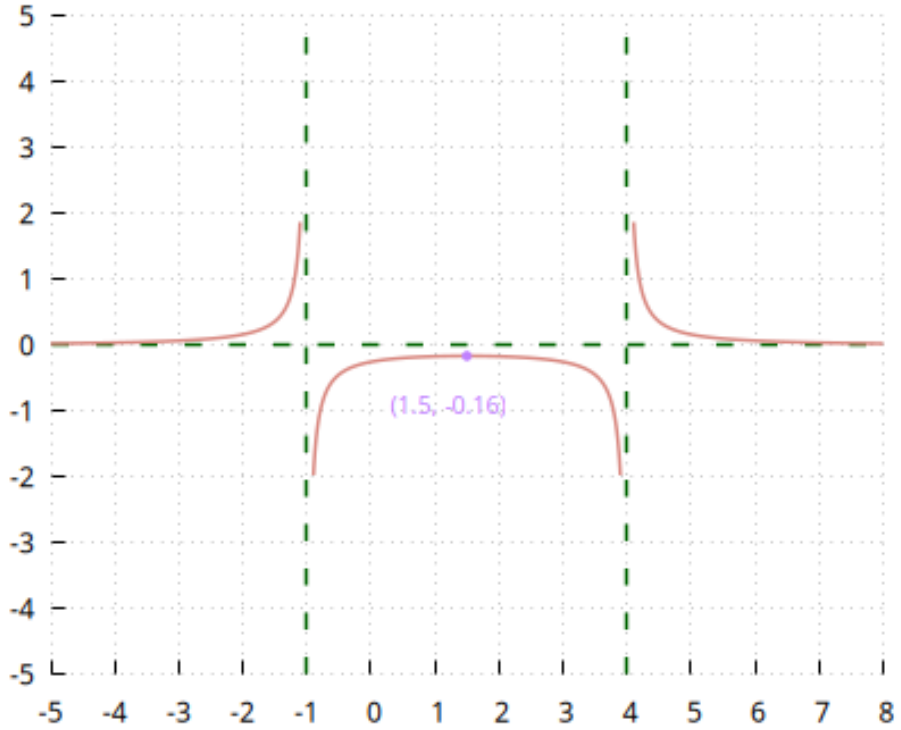
$$0 = (x^2-3x-4)^3$$
$$0 = [(x-4)(x+1)]^3$$
$$x=4 \text{ et } x=-1$$

5/6/7.

Valeur test pour x	-2	0	2	5
$f'(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$f''(x)$	$+$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	Concave vers le haut, Croissante	Concave vers le bas, Croissante	Concave vers le bas, Décroissante	Concave vers le haut, Décroissante

Maximum local en $(1.5, -0.16)$

8.



c) $h(x) = x^4-5x^3+x^2+21x-18$

1. Aucune restriction; aucune asymptote

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

2. Abscisses à l'origine :

$$0 = x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$$
$$0 = (x-1)(x^3 - 4x^2 - 3x + 18)$$

Facteur : $x^4 - 5x^3 + x^2 + 21x - 18$

Zéros possibles : $\pm 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 18$

$h(1) = 0$; $x - 1$ est un facteur

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & -5 & 1 & 21 & -18 \\ & & 1 & -4 & -3 & 18 \\ & 1 & -4 & -3 & 18 & 0 \end{array}$$

Facteur : $x^3 - 4x^2 - 3x + 18$

Zéros possibles : $\pm 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 18$

$h(-2) = 0$; $x + 2$ est un facteur

$$\begin{array}{rrrrr} -2 & 1 & -4 & -3 & 18 \\ & & -2 & 12 & -18 \\ & 1 & -6 & 9 & 0 \end{array}$$
$$0 = (x-1)(x+2)(x^2 - 6x + 9)$$
$$0 = (x-1)(x+2)(x-3)^2$$

$x = 1 \qquad x = -2 \qquad x = 3$

$(1,\ 0)$, $(-2,\ 0)$ et $(3,\ 0)$

Ordonnée à l'origine : $h(0) = -18 \qquad (0,\ -18)$

3.

$$h'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 2x + 21$$

Facteur : $4x^3 - 15x^2 + 2x + 21$

Zéros possibles : $\pm 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ 3,\ \frac{3}{2},\ \frac{3}{4},\ 7,\ \frac{7}{2},\ \frac{7}{4},\ 21,\ \frac{21}{2},\ \frac{21}{4}$

$h'(-1) = 0$; $x + 1$ est un facteur

$$\begin{array}{rrrrr} -1 & 4 & -15 & 2 & 21 \\ & & -4 & 19 & -21 \\ & 4 & -19 & 21 & 0 \end{array}$$
$$0 = (x+1)(4x^2 - 19x + 21)$$
$$0 = (x+1)\left[4x^2 - 7x - 12x + 21\right]$$
$$0 = (x+1)\left[x(4x-7) - 3(4x-7)\right]$$
$$0 = (x+1)(4x-7)(x-3)$$

Nombres critiques : $x = -1,\ \frac{7}{4},\ 3$

Points critiques : $(-1,\ -32)$, $(1.75,\ 4.39)$, et $(3,\ 0)$

4.

$$h''(x) = 12x^2 - 30x + 2$$
$$0 = 2(6x^2 - 15x + 1)$$
$$0 = 6x^2 - 15x + 1$$
$$x = \frac{15 \pm \sqrt{(-15)^2 - 4(6)(1)}}{2(6)}$$
$$x = \frac{15 \pm \sqrt{201}}{12}$$

$x \cong 2.43$ et $x \cong 0.07$

Points d'inflexion possibles : $(2.43,\ 2.05)$ et $(0.07,\ -16.56)$

5/6/7.

Valeur test pour x	-2	0	1	2	2.5	4
$h'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$
$h''(x)$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$
$h(x)$	Déc., Cc haut	Croi., Cc haut	Croi., Cc bas	Déc., Cc bas	Déc., Cc haut	Croi., Cc haut

Minimum local en $(-1,\ -32)$

PI en $(0.07,\ -16.56)$

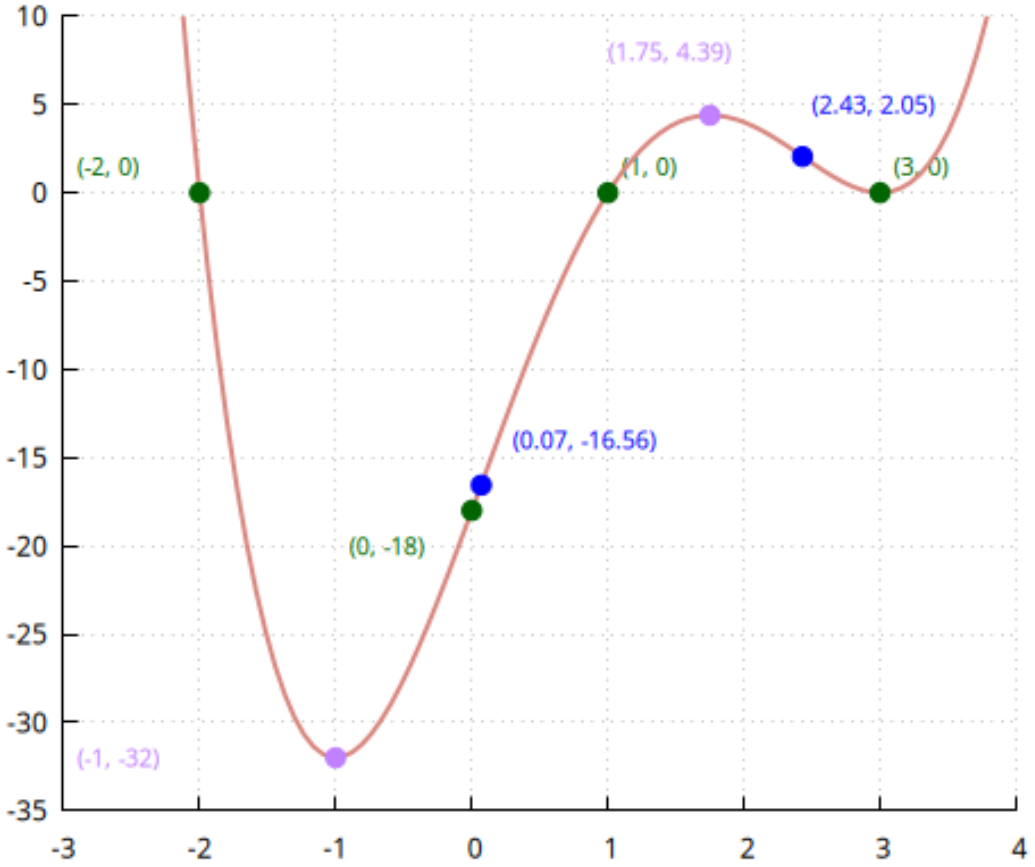
Maximum local en $(1.75,\ 4.39)$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

PI en $(2.43,\ 2.05)$

Minimum local en $(3,\ 0)$

8.



Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.