2.4 Leçon sur les fonctions rationnelles avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Échauffement

Trouvez les intervalles de concavité et les coordonnées de tout point d'inflexion pour $y = \frac{1}{3}x^3 - 12x^2 + 5$

$$y' = x^2 - 24x$$
$$y'' = 2x - 24$$
$$0 = 2(x - 12)$$
$$x = 12$$

Point d'inflexion possible :

$$y = \frac{1}{3}(12)^3 - 12(12)^2 + 5 = -1147$$

$(12, -1147)$ est un point d'inflexion possible

Valeur test pour x	11	13
y''	−	+
y	Concave vers le bas	Concave vers le haut

Concave vers le haut : $(12, \infty)$

Concave vers le bas : $(-\infty, 12)$

Rappel :

$f''(x) = 0$ ou n'existe pas est un PI possible

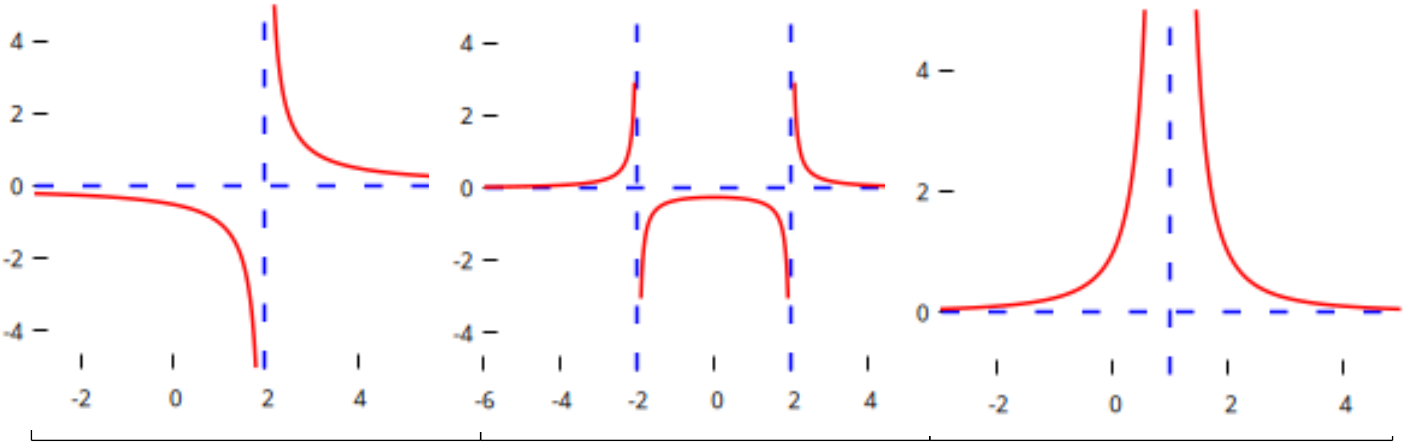
Si $f''(x) < 0$, $f(x)$ est concave vers le BAS

Si $f''(x) > 0$, $f(x)$ est concave vers le HAUT

Partie 2 : Rappel de quelques fonctions rationnelles simples

Degré du dénominateur > degré du numérateur :

$y = \frac{1}{x-2}$	$y = \frac{1}{x^2-4}$	$y = \frac{1}{(x-1)^2}$

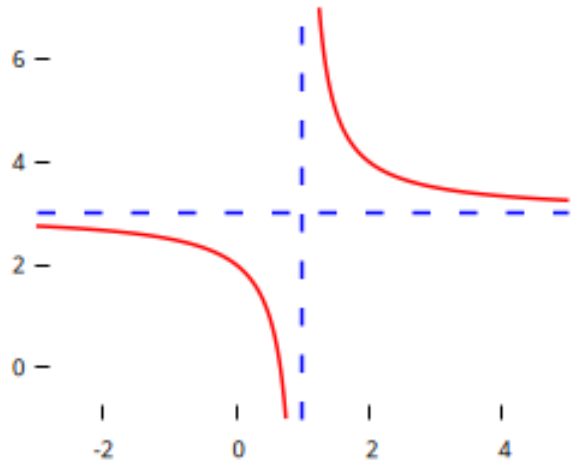


Remarquez : Les asymptotes horizontales sont toutes à $y = 0$

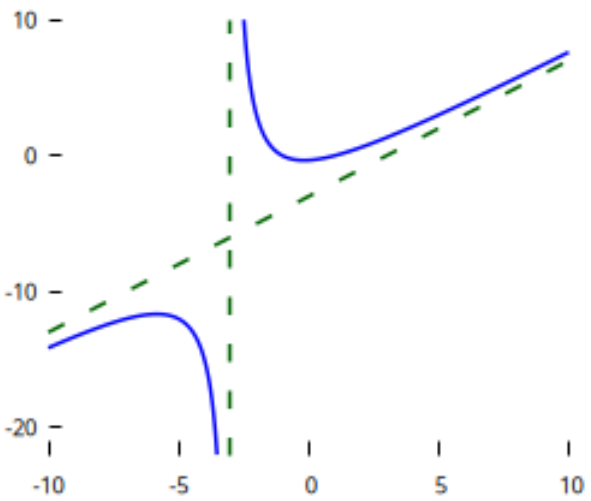
Les asymptotes verticales sont aux zéros du dénominateur

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Degré du dénominateur = degré du numérateur :

$y = \frac{3x-2}{x-1}$ 	Remarquez : AH au quotient des coefficients dominants AV au zéro du dénominateur

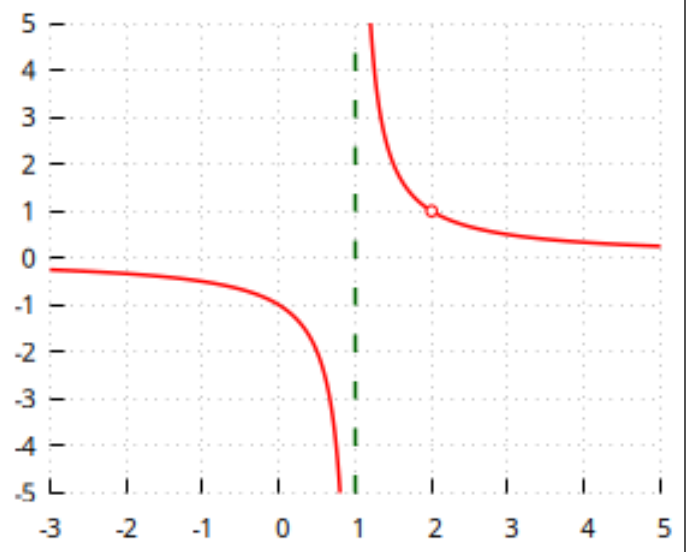
Degré du dénominateur < degré du numérateur :

$y = \frac{x^2-1}{x+3}$ 	Remarquez : Asymptote oblique au quotient du numérateur et du dénominateur; AV au zéro du dénominateur

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Asymptote verticale vs. Trou dans le graphique

$f(x) = \frac{(x-2)}{(x-1)(x-2)}$



Remarquez : AV à $x = 1$; $f(1) = \frac{-1}{0}$

Trou en $(2, 1)$; $f(2) = \frac{0}{0}$ (supprimez la discontinuité pour trouver la valeur de y du trou)

Conclusion : Si $f(a) = \frac{\#}{0}$, $x = a$ est une AV

Si $f(a) = \frac{0}{0}$, il y a un trou dans le graphique lorsque $x = a$

Définition des asymptotes par la limite :

Pour la fonction rationnelle $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

Il y a une asymptote verticale en $x = a$ lorsque $g(a) = 0$ et $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty$

Il y a une asymptote horizontale en $y = L$ lorsque $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Remarque : L'asymptote horizontale n'existe que si le degré du numérateur est **inférieur ou égal** au degré du dénominateur.

Partie 3 : Appliquez vos connaissances pour tracer des fonctions rationnelles

Exemple 1 : Indiquez les asymptotes horizontales des fonctions suivantes :

a) $y = \frac{3x^2 + 2}{6x^2 - 4x - 1}$

AH : $y = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

b) $y = \frac{3x^2 + 2}{6x^3 - 4x - 1}$

AH : $y = 0$

Exemple 2 : Considérez la fonction $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-3)}$

a) Trouvez les asymptotes

AH : $y = 0$

AV : $x = -2$ et $x = 3$

b) Trouvez les limites unilatérales lorsque les valeurs de x approchent les asymptotes verticales (substituez des valeurs très proches de la limite pour x, et trouvez vers quelle valeur la fonction tend)

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = \infty$$

Test : $f(-2.00001) = 19999.96$; donc tend vers $+\infty$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = -\infty$$

Test : $f(-1.9999) = -2000.04$; donc tend vers $-\infty$

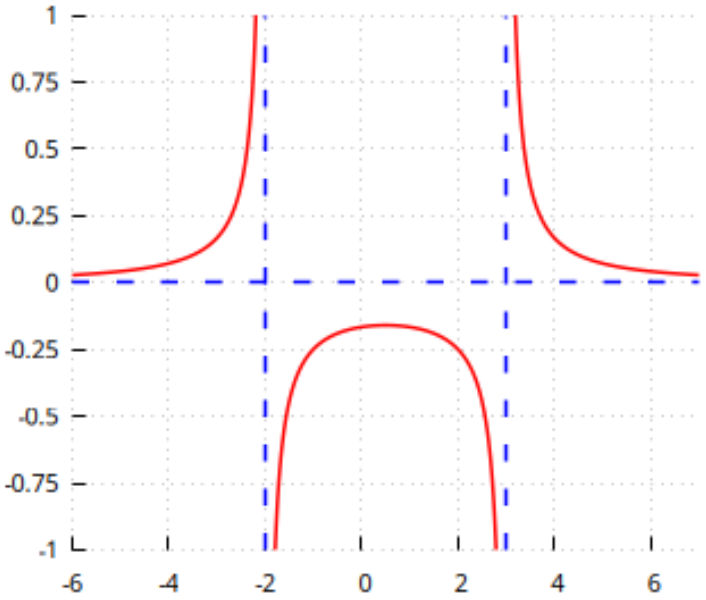
$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = -\infty$$

Test : $f(2.9999) = -2000.04$; donc tend vers $-\infty$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = \infty$$

Test : $f(3.00001) = 19999.96$; donc tend vers $+\infty$

c) Esquissez le graphique



Exemple 3 : Considérez la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

a) Où sont les asymptotes verticales et horizontales?

AH : $y = 0$

AV : aucune, $x^2 + 1 \neq 0$

b) Trouvez tout point maximum/minimum local et les intervalles de croissance/décroissance

$$f'(x) = \frac{0(x^2+1) - 2x(1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

Trouvons les nombres critiques :

$$0 = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

$$0 = -2x$$

$$x = 0$$

Point critique : $(0, 1)$

$$f(0) = 1$$

Valeur test pour x	-1	1
$f'(x)$	$+$	$-$
$f(x)$	Croissante	Décroissante

Croissante : $(-\infty, 0)$

Décroissante : $(0, \infty)$

Maximum local en $(0, 1)$

c) Trouvez les points d'inflexion

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1)^2 - 2(x^2+1)(2x)(-2x)}{(x^2+1)^4}$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+1) - 2(2x)(-2x)}{(x^2+1)^3}$$
$$f''(x) = \frac{-2x^2 - 2 + 8x^2}{(x^2+1)^3}$$
$$f''(x) = \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3}$$

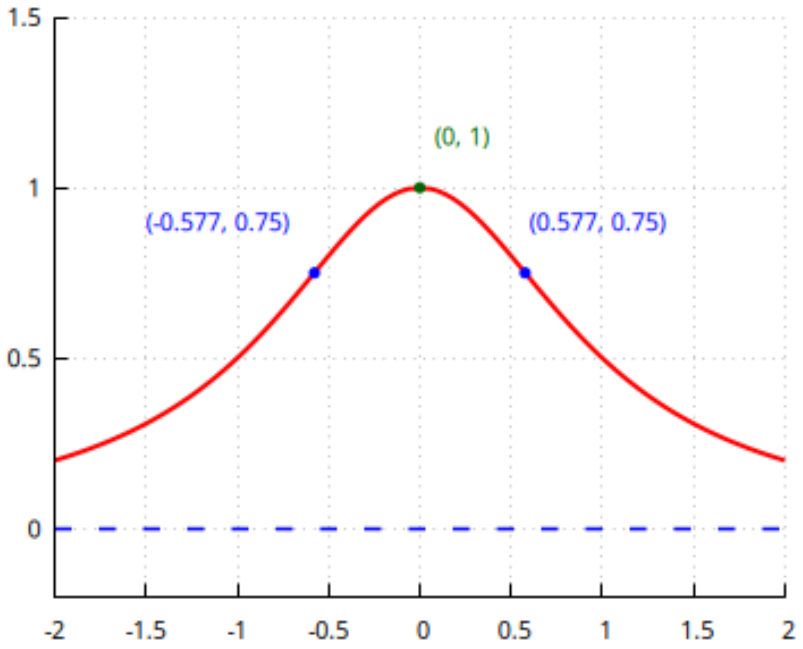
Trouvons les PI possibles :

$$0 = \frac{6x^2 - 2}{(x^2+1)^3}$$
$$0 = 6x^2 - 2$$
$$x^2 = \frac{2}{6}$$
$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0.577$$

$(0.577,\ 0.75)$ et $(-0.577,\ 0.75)$

Valeur test pour x	-1	0	1
$f''(x)$	+	−	+
$f(x)$	Concave vers le haut	Concave vers le bas	Concave vers le haut

d) Esquissez un graphique de la fonction



Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.