2.4 Leçon sur les fonctions rationnelles

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Échauffement

Trouvez les intervalles de concavité et les coordonnées de tout point d'inflexion pour $y = \frac{1}{3}x^3 - 12x^2 + 5$

Rappel :

$f''(x) = 0$ ou n'existe pas est un PI possible

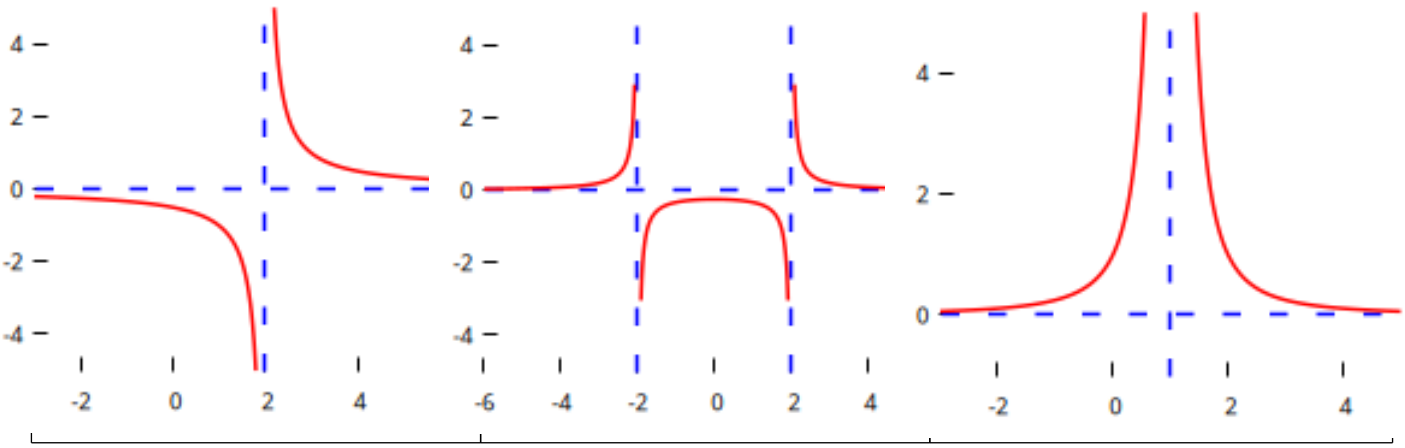
Si $f''(x) < 0$, $f(x)$ est concave vers le BAS

Si $f''(x) > 0$, $f(x)$ est concave vers le HAUT

Partie 2 : Rappel de quelques fonctions rationnelles simples

Degré du dénominateur > degré du numérateur :

$y = \frac{1}{x-2}$	$y = \frac{1}{x^2-4}$	$y = \frac{1}{(x-1)^2}$

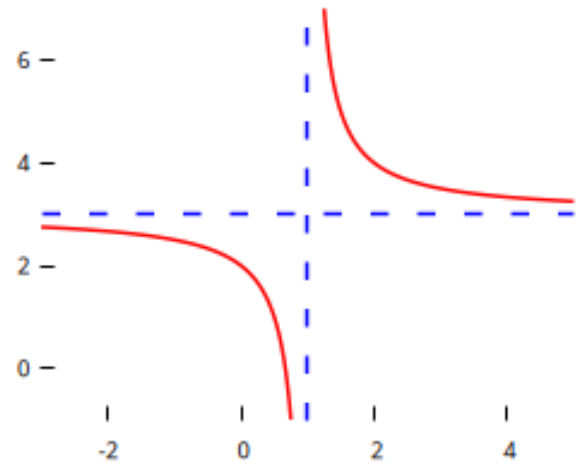


Remarquez : Les asymptotes horizontales sont toutes à $y = 0$

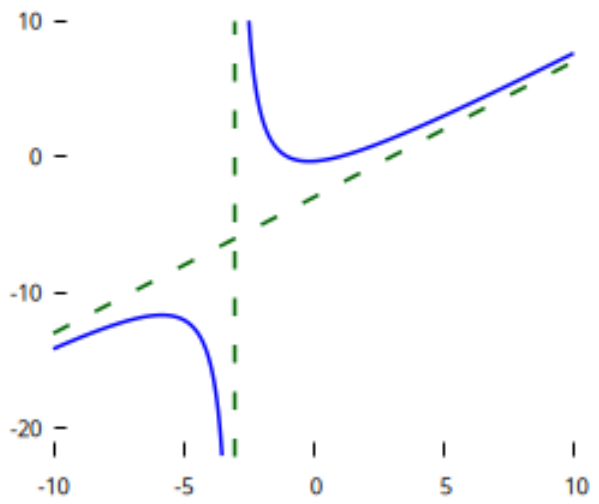
Les asymptotes verticales sont aux zéros du dénominateur

Degré du dénominateur = degré du numérateur :

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$y = \frac{3x-2}{x-1}$ 	Remarquez : AH au quotient des coefficients dominants AV au zéro du dénominateur

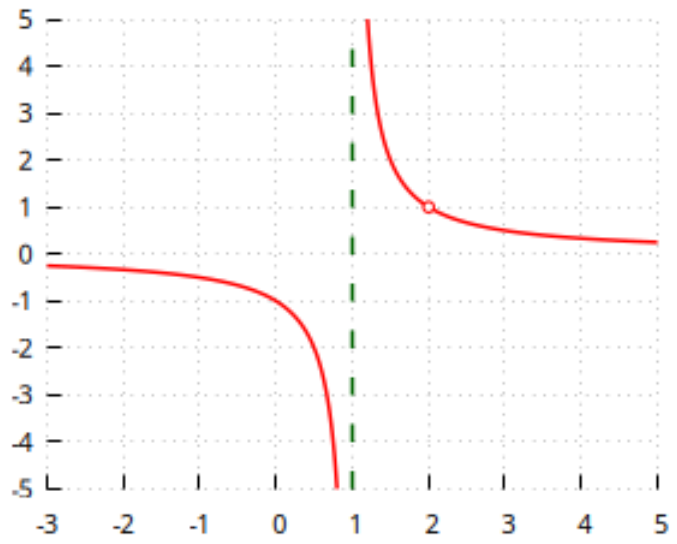
Degré du dénominateur < degré du numérateur :

$y = \frac{x^2-1}{x+3}$ 	Remarquez : Asymptote oblique au quotient du numérateur et du dénominateur; AV au zéro du dénominateur

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Asymptote verticale vs. Trou dans le graphique

$f(x) = \frac{(x-2)}{(x-1)(x-2)}$



Remarquez : AV à $x = 1$; $f(1) = \frac{-1}{0}$

Trou en $(2, 1)$; $f(2) = \frac{0}{0}$ (supprimez la discontinuité pour trouver la valeur de y du trou)

Conclusion : Si $f(a) = \frac{\#}{0}$, $x = a$ est une AV

Si $f(a) = \frac{0}{0}$, il y a un trou dans le graphique lorsque $x = a$

Définition des asymptotes par la limite :

Pour la fonction rationnelle $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

Il y a une asymptote verticale en $x = a$ lorsque $g(a) = 0$ et $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm \infty$

Il y a une asymptote horizontale en $y = L$ lorsque $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

Remarque : L'asymptote horizontale n'existe que si le degré du numérateur est **inférieur ou égal** au degré du dénominateur.

Partie 3 : Appliquez vos connaissances pour tracer des fonctions rationnelles

Exemple 1 : Indiquez les asymptotes horizontales des fonctions suivantes :

a) $y = \frac{3x^2 + 2}{6x^2 - 4x - 1}$

b) $y = \frac{3x^2 + 2}{6x^3 - 4x - 1}$

Exemple 2 : Considérez la fonction $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-3)}$

a) Trouvez les asymptotes

b) Trouvez les limites unilatérales lorsque les valeurs de x approchent les asymptotes verticales (substituez des valeurs très proches de la limite pour x, et trouvez vers quelle valeur la fonction tend)

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

c) Esquissez le graphique

Exemple 3 : Considérez la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

a) Où sont les asymptotes verticales et horizontales?

b) Trouvez tout point maximum/minimum local et les intervalles de croissance/décroissance

Valeur test pour x		
$f'(x)$		
$f(x)$		

c) Trouvez les points d'inflexion

Valeur test pour x			
$f''(x)$			
$f(x)$			

d) Esquissez un graphique de la fonction

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.