2.3 Leçon sur la concavité et la dérivée seconde avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

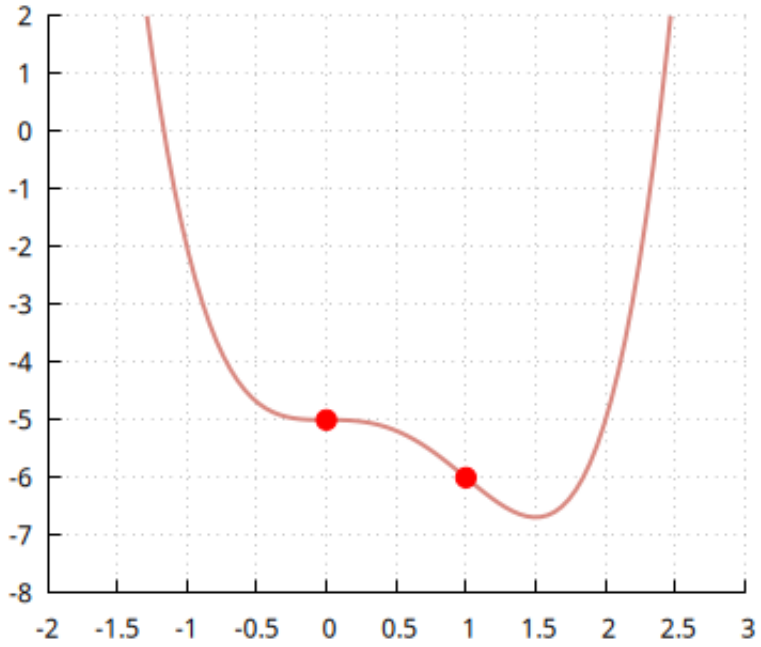
Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

La **dérivée seconde** est la dérivée de la dérivée première. C'est le taux de changement de la pente de la tangente.

Partie 1 : Découverte

Exemple 1 :

a) Étant donné le graphique de $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5$



$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12x$$

Quand $f''(x) = 0$?

$$0 = 12x^2 - 12x$$
$$0 = 12x(x - 1)$$
$$x = 0 \text{ ou } x = 1$$

b) Utilisez votre crayon pour simuler une tangente à la fonction lorsque $x = -1$. Déplacez lentement le crayon vers la droite, en le gardant tangent à la courbe, en approchant $x = 0$. Qu'arrive-t-il à la pente de la tangente? Est-elle au-dessus ou au-dessous de la courbe? Quelle est la valeur de $f''(-0.5)$?

- La courbe est au-dessus de la tangente.
- Les pentes des tangentes augmentent.
- $f''(-0.5) = 9$; c'est positif

c) Déplacez lentement le crayon vers la droite, en le gardant tangent à la courbe, en passant par $x = 0$. Qu'arrive-t-il à la pente de la tangente lorsqu'elle passe par $x = 0$? Quelle est la valeur de $f''(0.5)$?

- La pente de la tangente cesse d'augmenter et commence à diminuer.
- La courbe passe d'au-dessus de la tangente à au-dessous de la tangente.
- $f''(0.5) = -3$; c'est négatif

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

d) Qu'arrive-t-il à la pente de la tangente lorsqu'elle passe par $x = 1$?

- La pente de la tangente cesse de diminuer et commence à augmenter.
- La courbe passe d'au-dessous de la tangente à au-dessus de la tangente.

Résumé des constats :

Comment $f''(x)$ affecte $f(x)$:

Le graphique d'une fonction est concave vers le haut sur un intervalle si la courbe est au-dessus de toutes les tangentes sur l'intervalle. Les pentes des tangentes augmentent, donc $f''(x) > 0$ sur cet intervalle.

Le graphique d'une fonction est concave vers le bas sur un intervalle si la courbe est au-dessous de toutes les tangentes sur l'intervalle. Les pentes des tangentes diminuent, donc $f''(x) < 0$ sur cet intervalle.

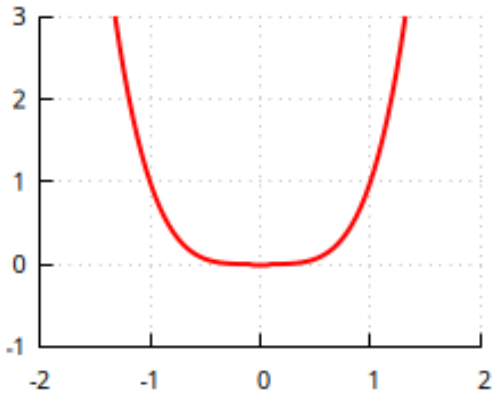
$f(x)$ est concave vers le **HAUT** sur un intervalle si $f''(x) > 0$ sur cet intervalle (les pentes des tangentes augmentent)

$f(x)$ est concave vers le **BAS** sur un intervalle si $f''(x) < 0$ sur cet intervalle (les pentes des tangentes diminuent)

Un **POINT D'INFLEXION** est un point du domaine de la fonction où le graphique passe de concave vers le haut à concave vers le bas, ou vice-versa. La dérivée seconde, $f''(x)$, est égale à zéro à ce point (ou n'existe pas) et change de signe de part et d'autre. Les tangentes passent de croissantes à décroissantes OU de décroissantes à croissantes.

Cependant, tout comme un point critique n'est pas nécessairement un maximum/minimum local, un zéro ou une restriction de la dérivée seconde n'est pas nécessairement un point d'inflexion non plus. Ce sont simplement l'ensemble des points à vérifier pour trouver le ou les points d'inflexion d'une courbe.

$f(x) = x^4$



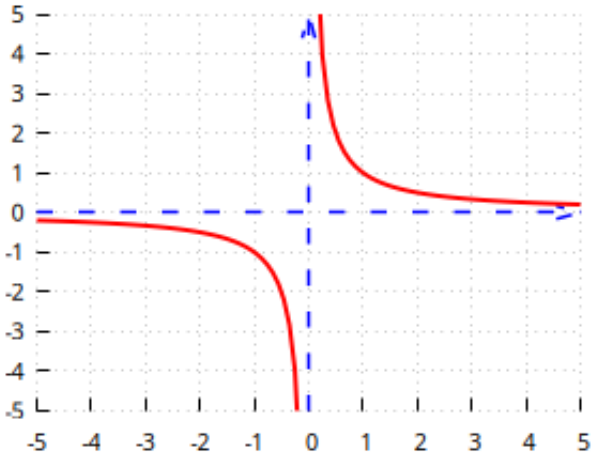
$f''(x) = 12x^2$

$f''(0) = 0$

Mais $x = 0$ n'est pas un point d'inflexion; la fonction n'a aucun changement de concavité. Les pentes des tangentes augmentent toujours.

Remarque : Il arrive souvent qu'un graphique ait une concavité différente de chaque côté d'une asymptote verticale. Cependant, puisque la courbe n'est pas continue à une asymptote verticale, elle ne peut jamais y avoir de point d'inflexion. Nous verrons ce type de fonctions à la prochaine leçon (fonctions rationnelles).

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



Le **critère de la dérivée seconde** peut aussi être utilisé pour aider à vérifier les points min/max locaux.

Dans le critère de la dérivée seconde, on vérifie les points critiques eux-mêmes (ceux où $f'(x) = 0$), en évaluant $f''(x)$ À chaque point critique.

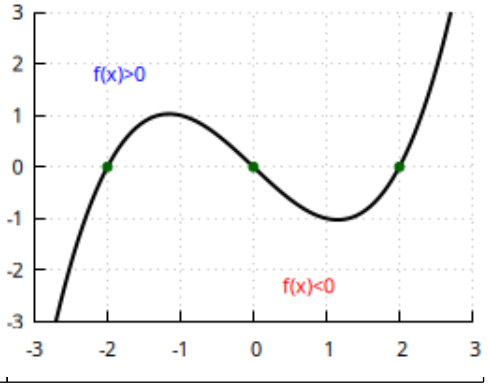
Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$, alors f a un minimum local en c.

Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) < 0$, alors f a un maximum local en c.

Remarque : Même s'il est souvent plus facile à utiliser que le critère de la dérivée première, le critère de la dérivée seconde peut échouer à certains points (p. ex. $y = x^4$). Si le critère de la dérivée seconde échoue, il faut alors utiliser le critère de la dérivée première pour classifier le point en question.

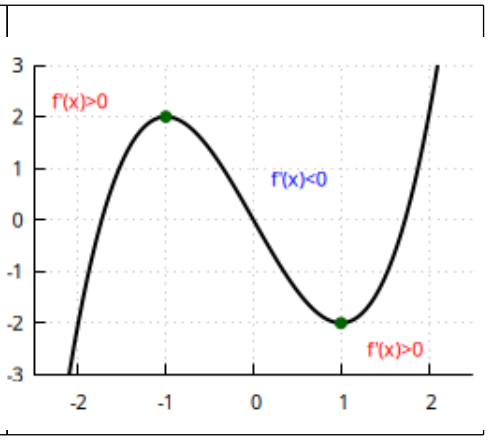
Page résumé de ce que nous savons jusqu'à présent

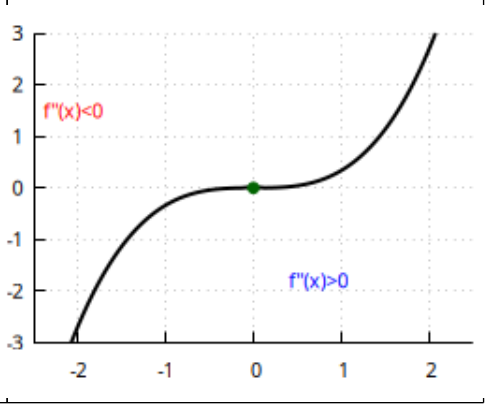
Relation entre $f(x)$, $f'(x)$, et $f''(x)$

$f(x) = 0$	Zéros (abscisses à l'origine) de la fonction	
$f(x) > 0$	La fonction est positive (au-dessus de l'axe des x)	
$f(x) < 0$	La fonction est négative (au-dessou de l'axe des x)	

$f'(x) = 0$	Tangente horizontale; extremum local possible (point tournant)	
$f'(x) > 0$	$f(x)$ est croissante	

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$f'(x) < 0$	$f(x)$ est décroissante	

$f''(x) = 0$	Point d'inflexion possible (changement de concavité)	
$f''(x) > 0$	$f(x)$ est concave vers le haut	
$f''(x) < 0$	$f(x)$ est concave vers le bas	

Tests des nombres critiques :

Extremum absolu sur un intervalle $[a, b]$	1. Trouvez le NC $x = c$, où $f'(x) = 0$ ou n'existe pas 2. Vérifiez les extrémités et les nombres critiques; $f(a)$, $f(c)$, $f(b)$ 3. Choisissez les valeurs minimale et maximale
Extremum local—Critère de la dérivée première des nombres critiques	1. Trouvez le NC $x = c$, où $f'(x) = 0$ ou n'existe pas 2. Faites un tableau de signes pour $f'(x)$. Utilisez des valeurs tests. 3. Tirez des conclusions sur $f(x)$ • Si $f(x)$ passe de croissante à décroissante, $(c, f(c))$ est un maximum local • Si $f(x)$ passe de décroissante à croissante, $(c, f(c))$ est un minimum local

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Extremum local—Critère de la dérivée seconde des nombres critiques	1. Trouvez le NC $x = c$, où $f'(x) = 0$ ou n'existe pas 2. Calculez la dérivée seconde $f''(x)$ 3. Testez les nombres critiques dans $f''(x)$ • si $f''(c) > 0$, $f(x)$ est concave vers le haut et $(c, f(c))$ est un minimum local • si $f''(c) < 0$, $f(x)$ est concave vers le bas et $(c, f(c))$ est un maximum local • si $f''(c) = 0$, le critère échoue et il faut utiliser le critère de la dérivée première

Exemple 2 : Pour la fonction $f(x) = x^4 - 6x^2 - 5$, trouvez tous les points d'inflexion (PI) et les intervalles de concavité.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x$$
$$f''(x) = 12x^2 - 12$$
$$0 = 12x^2 - 12$$
$$0 = 12(x^2 - 1)$$
$$0 = 12(x - 1)(x + 1)$$
$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -1$$

Points d'inflexion possibles :

$$f(1) = (1)^4 - 6(1)^2 - 5 = -10$$
$$f(-1) = (-1)^4 - 6(-1)^2 - 5 = -10$$

Utilisez le tableau de signes pour vérifier s'il y a des changements de concavité de part et d'autre de ces points.

Tableau de signes :

Valeur test pour x	-2	0	2
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	Concave vers le haut	Concave vers le bas	Concave vers le haut

PI en $(-1, -10)$ et PI en $(1, -10)$

Concave vers le haut : $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Concave vers le bas : $(-1, 1)$

Exemple 3 : Pour la fonction ci-dessous, trouvez les points critiques. Puis, classifiez-les à l'aide du critère de la dérivée seconde.

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$
$$g'(x) = 3x^2 - 6x$$
$$0 = 3x^2 - 6x$$
$$0 = 3x(x - 2)$$

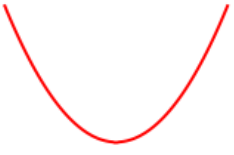
$x = 0$ et $x = 2$ sont des nombres critiques

$$g(0) = 2 \qquad g(2) = -2$$

Points critiques : $(0, 2)$ et $(2, -2)$

Critère de la dérivée seconde :

$$g''(x) = 6x - 6$$

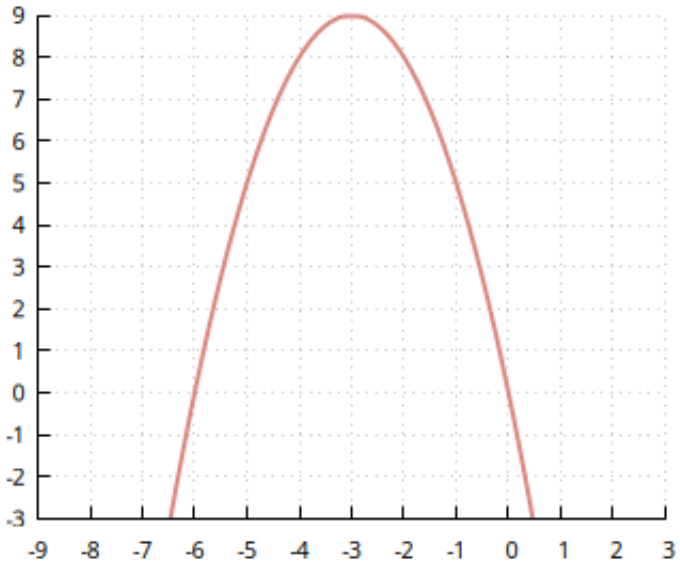
	$x = 0$	$x = 2$
$g''(x)$	$-$	$+$
$g(x)$	Concave vers le bas 	Concave vers le haut 

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

	(0, 2) est un MAXIMUM local	(2, -2) est un MINIMUM local

Exemple 4 : Esquissez un graphique d'une fonction qui satisfait chaque ensemble de conditions.

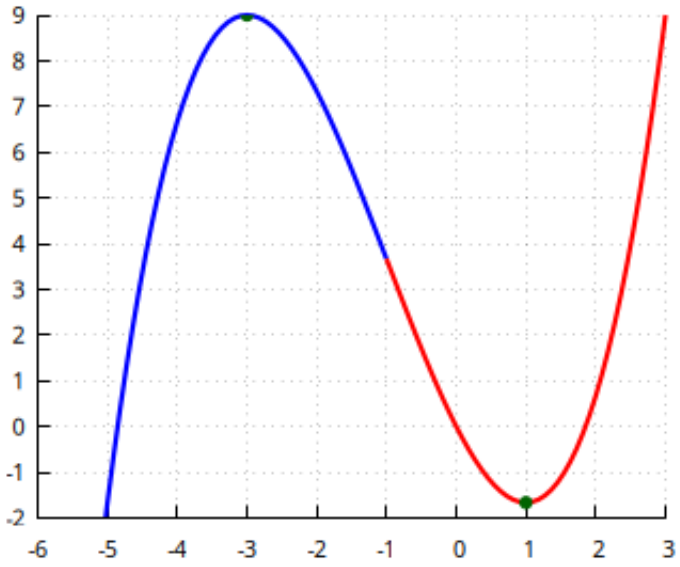
a) $f''(x) = -2$ pour tout x, $f'(-3) = 0$, $f(-3) = 9$



$f''(x) = -2$ pour tout x nous indique que la fonction est toujours concave vers le bas.

$f'(-3) = 0$ indique qu'il y a un maximum local en $(-3, 9)$

b) $f''(x) < 0$ lorsque $x < -1$, $f''(x) > 0$ lorsque $x > -1$, $f'(-3) = 0$, $f'(1) = 0$



$f(x)$ est concave vers le bas lorsque $x < -1$

$f(x)$ est concave vers le haut lorsque $x > -1$

Maximum local en $x = -3$

Minimum local en $x = 1$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.