2.3 Leçon sur la concavité et la dérivée seconde

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

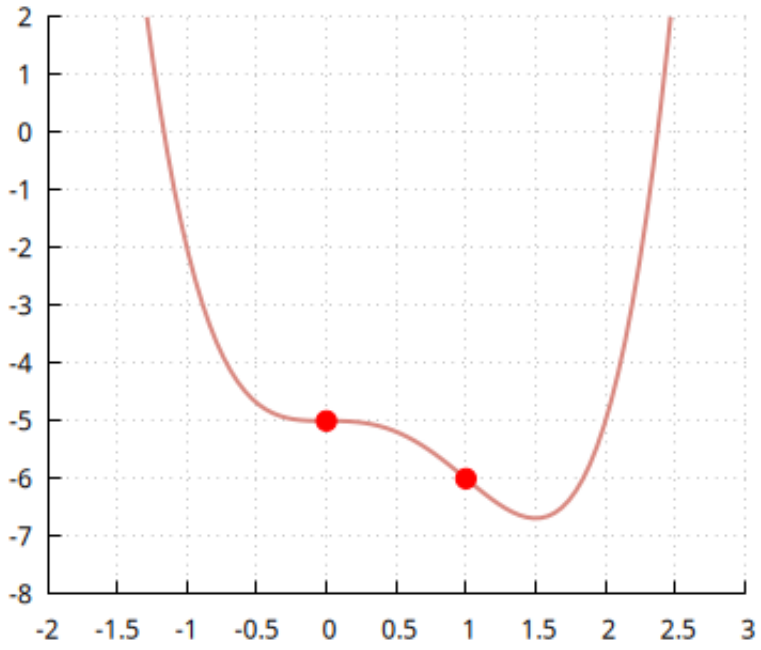
Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

La _____ est la dérivée de la dérivée première. C'est le taux de changement de la pente de la tangente.

Partie 1 : Découverte

Exemple 1 :

a) Étant donné le graphique de $f(x) = x^4 - 2x^3 - 5$



Quand $f''(x) = 0$?

b) Utilisez votre crayon pour simuler une tangente à la fonction lorsque $x = -1$. Déplacez lentement le crayon vers la droite, en le gardant tangent à la courbe, en approchant $x = 0$. Qu'arrive-t-il à la pente de la tangente? Est-elle au-dessus ou au-dessous de la courbe? Quelle est la valeur de $f''(-0.5)$?

c) Déplacez lentement le crayon vers la droite, en le gardant tangent à la courbe, en passant par $x = 0$. Qu'arrive-t-il à la pente de la tangente lorsqu'elle passe par $x = 0$? Quelle est la valeur de $f''(0.5)$?

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

d) Qu'arrive-t-il à la pente de la tangente lorsqu'elle passe par $x = 1$?

Résumé des constats :

Comment $f''(x)$ affecte $f(x)$:

Le graphique d'une fonction est concave vers le haut sur un intervalle si la courbe est au-dessus de toutes les tangentes sur l'intervalle. Les pentes des tangentes augmentent, donc $f''(x) > 0$ sur cet intervalle.

Le graphique d'une fonction est concave vers le bas sur un intervalle si la courbe est au-dessous de toutes les tangentes sur l'intervalle. Les pentes des tangentes diminuent, donc $f''(x) < 0$ sur cet intervalle.

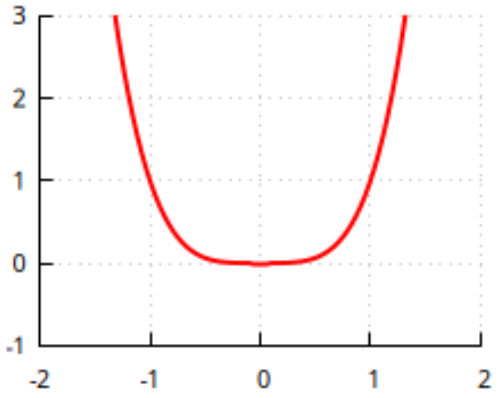
$f(x)$ est concave vers le _____ sur un intervalle si $f''(x) > 0$ sur cet intervalle (les pentes des tangentes augmentent)

$f(x)$ est concave vers le _____ sur un intervalle si $f''(x) < 0$ sur cet intervalle (les pentes des tangentes diminuent)

Un _____ est un point du domaine de la fonction où le graphique passe de concave vers le haut à concave vers le bas, ou vice-versa. La dérivée seconde, $f''(x)$, est égale à zéro à ce point (ou n'existe pas) et change de signe de part et d'autre. Les tangentes passent de croissantes à décroissantes OU de décroissantes à croissantes.

Cependant, tout comme un point critique n'est pas nécessairement un maximum/minimum local, un zéro ou une restriction de la dérivée seconde n'est pas nécessairement un point d'inflexion non plus. Ce sont simplement l'ensemble des points à vérifier pour trouver le ou les points d'inflexion d'une courbe.

$f(x) = x^4$



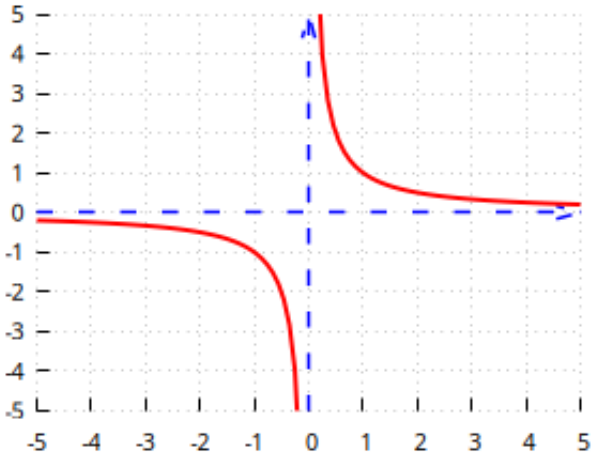
$f''(x) = 12x^2$

$f''(0) = 0$

Mais $x = 0$ n'est pas un point d'inflexion; la fonction n'a aucun changement de concavité. Les pentes des tangentes augmentent toujours.

Remarque : Il arrive souvent qu'un graphique ait une concavité différente de chaque côté d'une asymptote verticale. Cependant, puisque la courbe n'est pas continue à une asymptote verticale, elle ne peut jamais y avoir de point d'inflexion. Nous verrons ce type de fonctions à la prochaine leçon (fonctions rationnelles).

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



Le _____ peut aussi être utilisé pour aider à vérifier les points min/max locaux.

Dans le critère de la dérivée seconde, on vérifie les points critiques eux-mêmes (ceux où $f'(x) = 0$), en évaluant $f''(x)$ À chaque point critique.

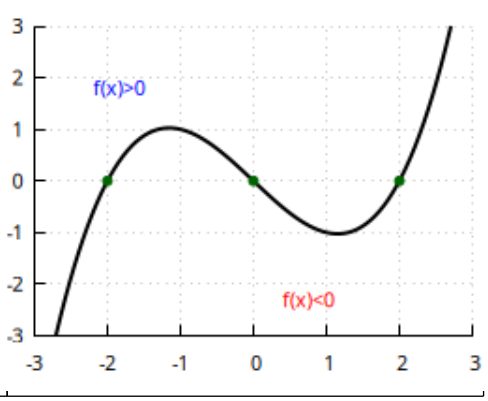
Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) > 0$, alors f a un _____ en c.

Si $f'(c) = 0$ et $f''(c) < 0$, alors f a un _____ en c.

Remarque : Même s'il est souvent plus facile à utiliser que le critère de la dérivée première, le critère de la dérivée seconde peut échouer à certains points (p. ex. $y = x^4$). Si le critère de la dérivée seconde échoue, il faut alors utiliser le critère de la dérivée première pour classifier le point en question.

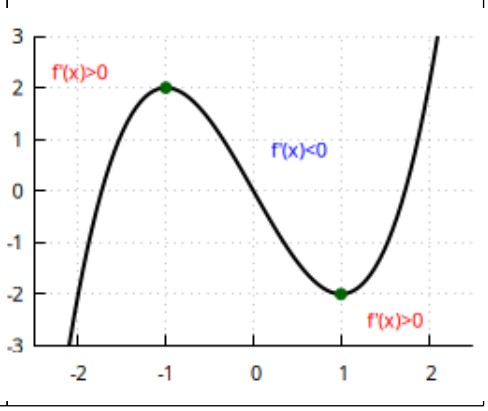
Page résumé de ce que nous savons jusqu'à présent

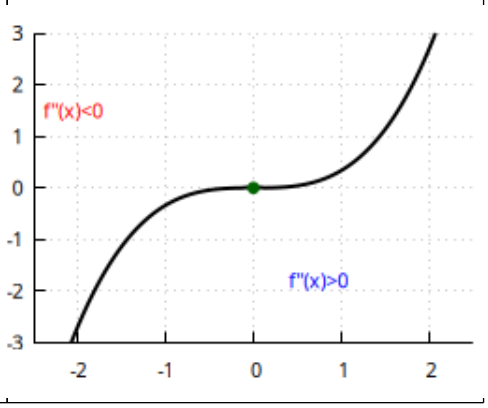
Relation entre $f(x)$, $f'(x)$, et $f''(x)$

$f(x) = 0$	Zéros (abscisses à l'origine) de la fonction	
$f(x) > 0$	La fonction est positive (au-dessus de l'axe des x)	
$f(x) < 0$	La fonction est négative (au-dessou de l'axe des x)	

$f'(x) = 0$	Tangente horizontale; extremum local possible (point tournant)	
$f'(x) > 0$	$f(x)$ est croissante	

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$f'(x) < 0$	$f(x)$ est décroissante	

$f''(x) = 0$	Point d'inflexion possible (changement de concavité)	
$f''(x) > 0$	$f(x)$ est concave vers le haut	
$f''(x) < 0$	$f(x)$ est concave vers le bas	

Tests des nombres critiques :

Extremum absolu sur un intervalle $[a, b]$	1. Trouvez le NC $x = c$, où $f'(x) = 0$ ou n'existe pas 2. Vérifiez les extrémités et les nombres critiques; $f(a)$, $f(c)$, $f(b)$ 3. Choisissez les valeurs minimale et maximale
Extremum local—Critère de la dérivée première des nombres critiques	1. Trouvez le NC $x = c$, où $f'(x) = 0$ ou n'existe pas 2. Faites un tableau de signes pour $f'(x)$. Utilisez des valeurs tests. 3. Tirez des conclusions sur $f(x)$ • Si $f(x)$ passe de croissante à décroissante, $(c, f(c))$ est un maximum local • Si $f(x)$ passe de décroissante à croissante, $(c, f(c))$ est un minimum local

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Extremum local—Critère de la dérivée seconde des nombres critiques	1. Trouvez le NC $x = c$, où $f'(x) = 0$ ou n'existe pas 2. Calculez la dérivée seconde $f''(x)$ 3. Testez les nombres critiques dans $f''(x)$ • si $f''(c) > 0$, $f(x)$ est concave vers le haut et $(c, f(c))$ est un minimum local • si $f''(c) < 0$, $f(x)$ est concave vers le bas et $(c, f(c))$ est un maximum local • si $f''(c) = 0$, le critère échoue et il faut utiliser le critère de la dérivée première

Exemple 2 : Pour la fonction $f(x) = x^4 - 6x^2 - 5$, trouvez tous les points d'inflexion (PI) et les intervalles de concavité.

Exemple 3 : Pour la fonction ci-dessous, trouvez les points critiques. Puis, classifiez-les à l'aide du critère de la dérivée seconde.

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

Exemple 4 : Esquissez un graphique d'une fonction qui satisfait chaque ensemble de conditions.

a) $f''(x) = -2$ pour tout x, $f'(-3) = 0$, $f(-3) = 9$

b) $f''(x) < 0$ lorsque $x < -1$, $f''(x) > 0$ lorsque $x > -1$, $f'(-3) = 0$, $f'(1) = 0$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.