2.2 Leçon sur les maximums et minimums avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Révision

Déterminez tous les extremums locaux de la fonction ci-dessous à l'aide des nombres critiques et du critère de la dérivée première. Indiquez quand la fonction est croissante et décroissante.

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x + 5$$

Rappel : Les extremums locaux surviennent lorsque le signe de la dérivée CHANGE. Si le signe de la dérivée ne change pas, il n'y a ni l'un ni l'autre.

$$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$$
$$0 = 6(x^2 + x - 6)$$
$$0 = 6(x + 3)(x - 2)$$

$x = -3$ et $x = 2$ sont des nombres critiques

Points critiques :

$$f(-3) = 2(-3)^3 + 3(-3)^2 - 36(-3) + 5 = 86 \qquad (-3,\ 86)$$
$$f(2) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 36(2) + 5 = -39 \qquad (2,\ -39)$$

Valeur test pour x	-4	0	3
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	Croissante	Décroissante	Croissante

Intervalle de croissance : $(-\infty,\ -3) \cup (2,\ \infty)$

Intervalle de décroissance : $(-3,\ 2)$

Maximum local en $(-3,\ 86)$

Minimum local en $(2,\ -39)$

Partie 2 : Extremums locaux et absolus

Les valeurs maximales ou minimales locales d'une fonction sont aussi appelées extremums locaux, ou points tournants.

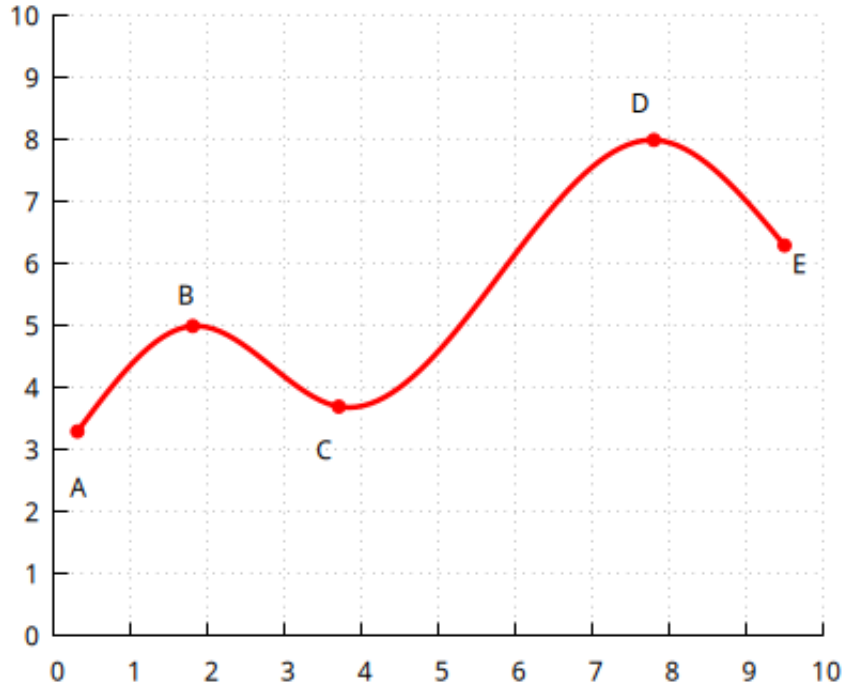
Maximum local : Si l'ordonnée de tous les points du voisinage est inférieure à l'ordonnée du point. Le signe de la dérivée changerait de positif avant le point, à zéro au point, à négatif après.

Minimum local : Si l'ordonnée de tous les points du voisinage est supérieure à l'ordonnée du point. Le signe de la dérivée changerait de négatif avant le point, à zéro au point, à positif après.

Maximum/minimum absolu : Une fonction $f(x)$ a un maximum ou un minimum ABSOLU au point a si $f(a)$ est la plus grande ou la plus petite valeur de $f(x)$ pour TOUT x du domaine.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 1 : Considérez le graphique d'une fonction sur l'intervalle $[0,\ 10]$.



a) Identifiez les points maximums locaux.

B et D

b) Identifiez les points minimums locaux.

C

c) Qu'ont en commun tous les points identifiés en a) et b)?

Ils auraient tous des tangentes horizontales.

d) Identifiez les points maximum et minimum absolus dans l'intervalle $[0,\ 10]$

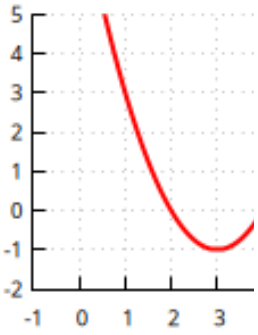
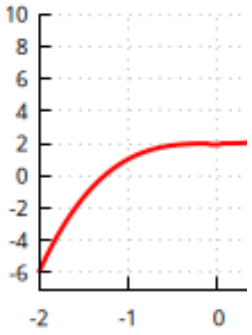
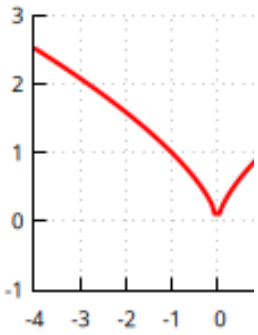
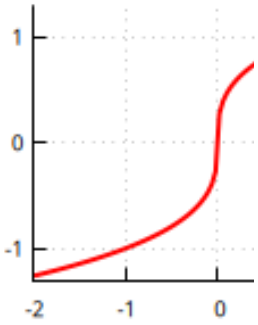
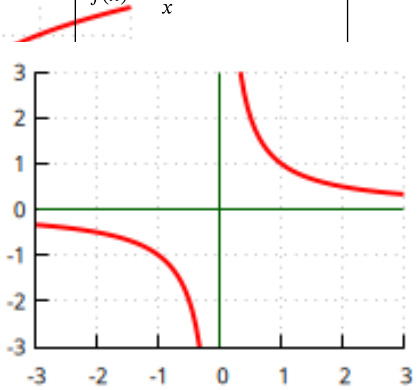
Le maximum absolu est en D

Le minimum absolu est en A

Rappel : Un nombre critique d'une fonction est une valeur de a dans le domaine de la fonction où soit $f'(a) = 0$, soit $f'(a)$ n'existe pas. Si a est un nombre critique, $(a,\ f(a))$ est un point critique.

Scénarios pour les nombres critiques :

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

1) $f'(a) = 0$ Extremum local en $(a,\ f(a))$ $f(x) = x^2 - 6x + 8$	**2)** $f'(a) = 0$ Aucun extremum local en $(a,\ f(a))$ $f(x) = x^3 + 2$	**3)** $f'(a)$ n'existe pas extremum local en $(a,\ f(a))$ (point de rebroussement) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$	**4)** $f'(a)$ n'existe pas Aucun extremum local en $(a,\ f(a))$ $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$	**5)** $f'(a)$ n'existe pas Aucun extremum local $f(a)$ n'existe pas non plus, donc a n'est PAS un nombre critique $f(x) = \frac{1}{x}$
				

Pour déterminer les valeurs extremums absolus d'une fonction sur un intervalle, trouvez les nombres critiques, puis substituez les nombres critiques ainsi que les abscisses des extrémités de l'intervalle dans la fonction.

Exemple 2 : Trouvez le maximum et le minimum absolus de la fonction $f(x) = x^3 - 12x - 3$ sur l'intervalle $-3 \le x \le 4$.

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$
$$0 = 3(x^2 - 4)$$
$$0 = 3(x - 2)(x + 2)$$

$x = 2$ et $x = -2$ sont des nombres critiques

Testez les nombres critiques ET les extrémités de l'intervalle.

$$f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) - 3 = 6$$
$$f(-2) = 13$$
$$f(2) = -19$$
$$f(4) = 13$$

Minimum absolu : $(2,\ -19)$

Maximum absolu : $(-2,\ 13)$ et $(4,\ 13)$

Exemple 3 : L'aire de la surface d'un contenant cylindrique doit être de $100\ \text{cm}^2$. Son volume est donné par la fonction $V(r) = 50r - \pi r^3$, où r est le rayon du cylindre en cm. Trouvez le volume maximal du cylindre si le rayon ne peut pas dépasser 3 cm.

$$V'(r) = 50 - 3\pi r^2$$

Trouvons les nombres critiques :

$$0 = 50 - 3\pi r^2$$
$$3\pi r^2 = 50$$
$$r = \sqrt{\frac{50}{3\pi}} \text{ est un nombre critique}$$

Testez les extrémités de l'intervalle et le nombre critique pour trouver le maximum absolu

$$V(0) = 0\ \text{cm}^3$$
$$V\left(\sqrt{\frac{50}{3\pi}}\right) = 76.8\ \text{cm}^3$$
$$V(3) = 65.2\ \text{cm}^3$$

Donc, le volume maximal du cylindre est d'environ 76,8 cm^3 lorsque le rayon est d'environ 2,3 cm.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.