2.1 Leçon sur la croissance et la décroissance avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

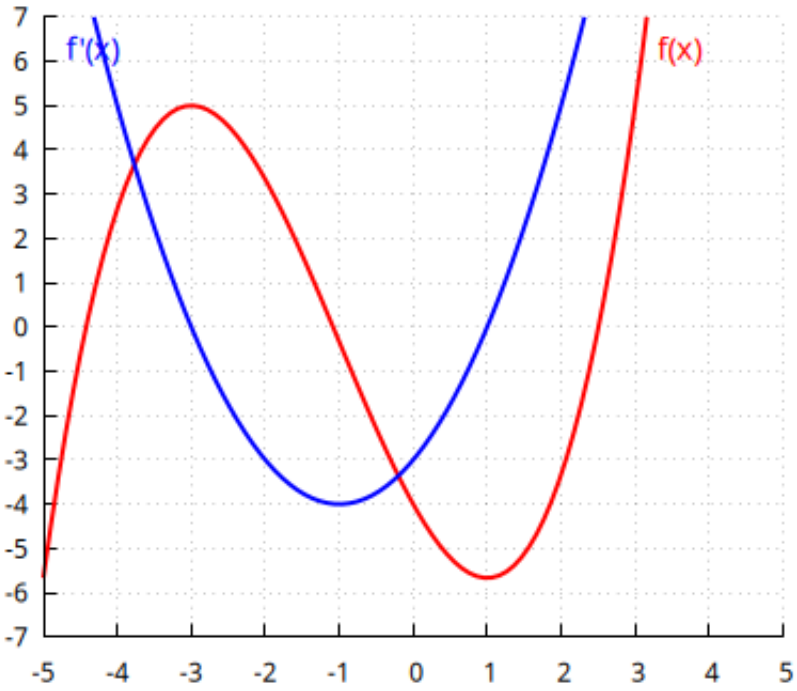
Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Croissante : Lorsque les valeurs de x augmentent, les valeurs de y augmentent

Décroissante : Lorsque les valeurs de x augmentent, les valeurs de y diminuent

Partie 1 : Découverte

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 4$$
$$f'(x) = x^2 + 2x - 3$$



a) Pour quelles valeurs de x la fonction $f(x)$ est-elle croissante?

$x < -3$ et $x > 1$

b) Pour quelles valeurs de x la fonction $f(x)$ est-elle décroissante?

$-3 < x < 1$

c) Qu'est-ce qui est vrai à propos du graphique de $f'(x)$ lorsque $f(x)$ est croissante?

$f'(x) > 0$; il est au-dessus de l'axe des x

d) Qu'est-ce qui est vrai à propos du graphique de $f'(x)$ lorsque $f(x)$ est décroissante?

$f'(x) < 0$; il est au-dessous de l'axe des x

Effets de $f'(x)$ sur $f(x)$: Lorsque le graphique de $f'(x)$ est positif, ou au-dessus de l'axe des x, sur un intervalle, alors la fonction $f(x)$ **croît** sur cet intervalle. De même, lorsque le graphique de $f'(x)$ est négatif, ou au-dessous de l'axe des x, sur un intervalle, alors la fonction $f(x)$ **décroît** sur cet intervalle.

Si $f'(x) > 0$ sur un intervalle, $f(x)$ est croissante sur cet intervalle

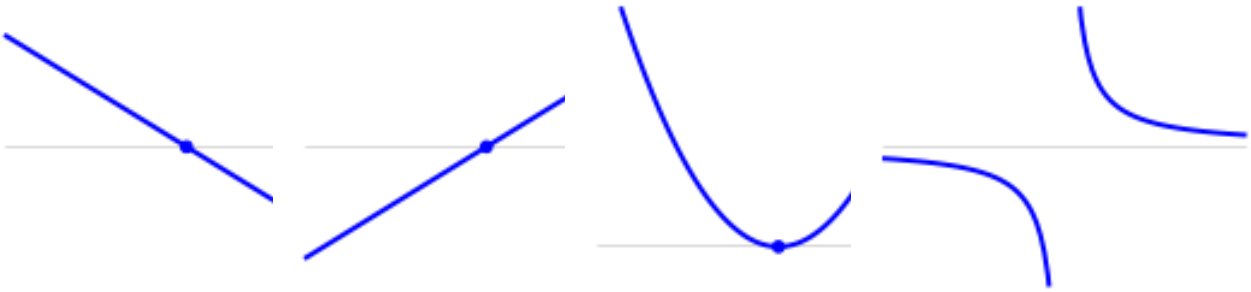
Si $f'(x) < 0$ sur un intervalle, $f(x)$ est décroissante sur cet intervalle

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Partie 2 : Propriétés des graphiques de $f(x)$ et $f'(x)$

Un nombre critique est une valeur a du domaine où $f'(a) = 0$ ou $f'(a)$ n'existe pas.

Un nombre critique pourrait donner…

	Un maximum local	Un minimum local	Ni l'un ni l'autre	Max/Min à un point de rebroussement
$f(x)$				
$f'(x)$				
	$f(x)$ a un maximum local $f'(x) = 0$ et change de + à -	$f(x)$ a un minimum local $f'(x) = 0$ et change de - à +	Aucun maximum /minimum local $f'(x) = 0$ mais ne change pas de signe	$f(x)$ a un minimum local $f'(x)$ n'existe pas mais change de - à +

Conclusion :

Les extremums locaux surviennent lorsque le signe de la dérivée CHANGE. Si le signe de la dérivée ne change pas, il n'y a pas d'extremum local.

Un nombre critique d'une fonction est une valeur de a dans le domaine de la fonction où soit $f'(a) = 0$, soit $f'(a)$ n'existe pas. Si a est un nombre critique, $(a, f(a))$ est un point critique. Les points critiques pourraient être des extremums locaux, mais pas nécessairement. Il faut tester autour des points critiques pour voir si la dérivée change de signe. C'est ce qu'on appelle le « **critère de la dérivée première** ».

Exemple 1 : Déterminez tous les extremums locaux de la fonction ci-dessous à l'aide des nombres critiques et du critère de la dérivée première. Indiquez quand la fonction est croissante ou décroissante.

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x - 10$$
$$f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$$
$$0 = 6(x^2 - 3x - 4)$$
$$0 = 6(x - 4)(x + 1)$$
$$x_1 = 4 \qquad x_2 = -1$$

Nombres critiques : $x_1 = 4$ $x_2 = -1$

Points critiques : $(4, -122)$ et $(-1, 3)$

$$f(4) = 2(4)^3 - 9(4)^2 - 24(4) - 10 = -122$$
$$f(-1) = 2(-1)^3 - 9(-1)^2 - 24(-1) - 10 = 3$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

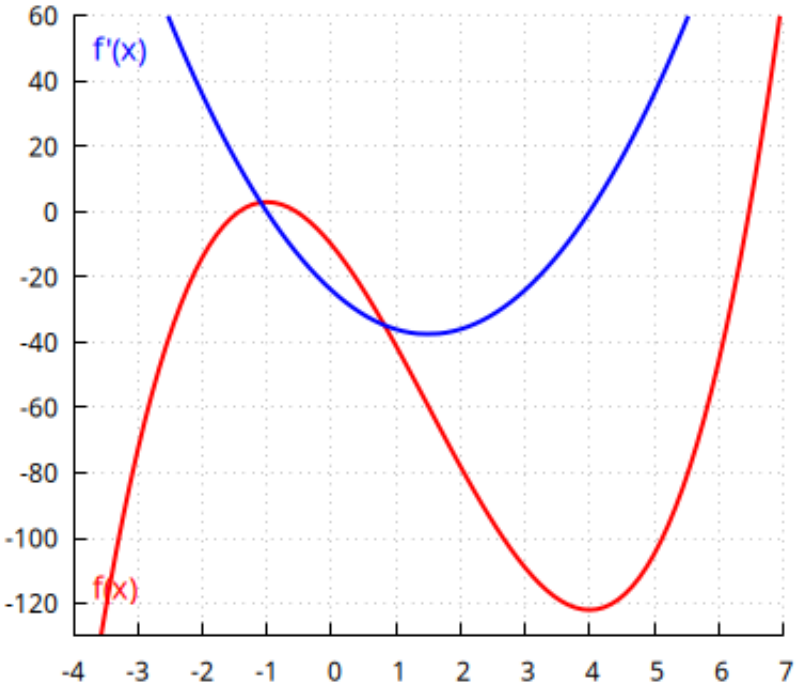
Tableau de signes :

Valeur test pour x	-2	0	5
$f'(x)$	+	−	+
$f(x)$	Croissante	Décroissante	Croissante

Croissante : $x < -1$ ou $x > 4$

Décroissante : $-1 < x < 4$

Remarquez comment nous pourrions utiliser le graphique de la dérivée pour vérifier notre solution :



Exemple 2 : Pour chaque fonction, utilisez le graphique de $f'(x)$ pour esquisser une fonction possible $f(x)$.

a)



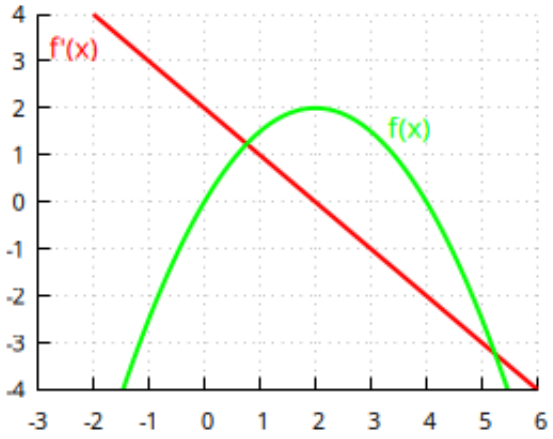
$f'(x)$ est la fonction constante $y = -2$.

Donc, $f(x)$ doit être une fonction linéaire de pente -2

L'ordonnée à l'origine pourrait être n'importe où.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

b)



$f'(x)$ est une fonction linéaire

Donc, $f(x)$ doit être une fonction quadratique

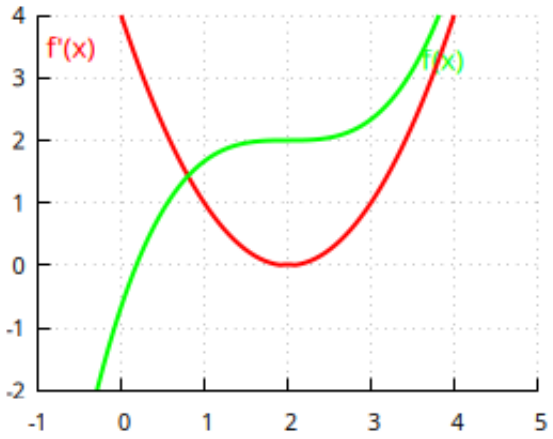
$f'(x) > 0$ lorsque $x < 2$ et $f'(x) < 0$ lorsque $x > 2$

Donc, $f(x)$ est croissante lorsque $x < 2$ et décroissante lorsque $x > 2$

$f'(x)$ passe de + à - en $x = 2$

Il doit y avoir un maximum local en $f(2)$.

c)



$f'(x)$ est une fonction quadratique

Donc, $f(x)$ doit être une fonction cubique

$f'(x) > 0$ lorsque $x < 2$ et lorsque $x > 2$

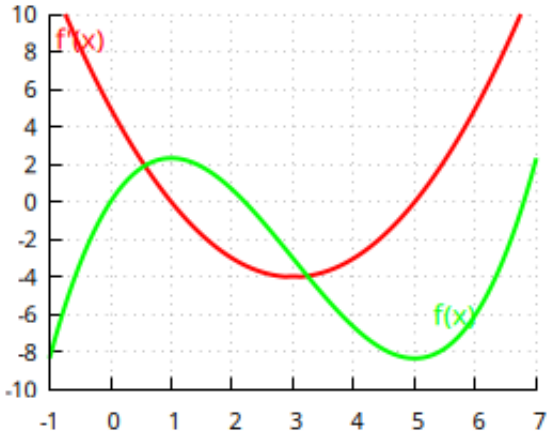
Donc, $f(x)$ est croissante lorsque $x < 2$ et lorsque $x > 2$

$f'(x)$ ne change pas de signe de part et d'autre de $x = 2$

Donc, il n'y a ni minimum ni maximum local en $f(2)$, mais la tangente serait horizontale à ce point.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

d)



$f'(x)$ est une fonction quadratique

Donc, $f(x)$ doit être une fonction cubique

$f'(x) > 0$ lorsque $x < 1$ et lorsque $x > 5$

Donc, $f(x)$ est croissante lorsque $x < 1$ et lorsque $x > 5$

$f'(x) < 0$ lorsque $1 < x < 5$

Donc, $f(x)$ est décroissante lorsque $1 < x < 5$

$f'(x)$ change de signe de part et d'autre de $x = 1$ (de + à -) et de $x = 5$ (de - à +)

Donc, il y a un maximum en $f(1)$ et un minimum local en $f(5)$

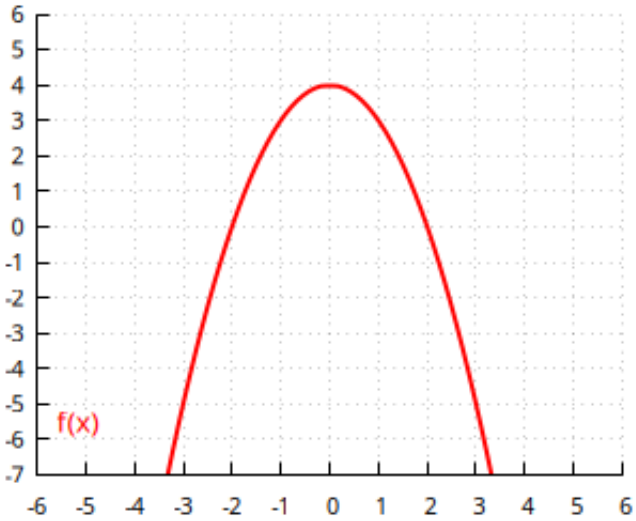
Exemple 3 : Esquissez une fonction continue pour chaque ensemble de conditions

a) $f'(x) > 0$ lorsque $x < 0$, $f'(x) < 0$ lorsque $x > 0$, $f(0) = 4$

$f(x)$ est croissante lorsque $x < 0$ et décroissante lorsque $x > 0$.

Donc, il doit y avoir un maximum local en $x = 0$.

$f(0) = 4$



b) $f'(x) > 0$ lorsque $x < -1$ et lorsque $x > 2$, $f'(x) < 0$ lorsque $-1 < x < 2$, $f(0) = 0$

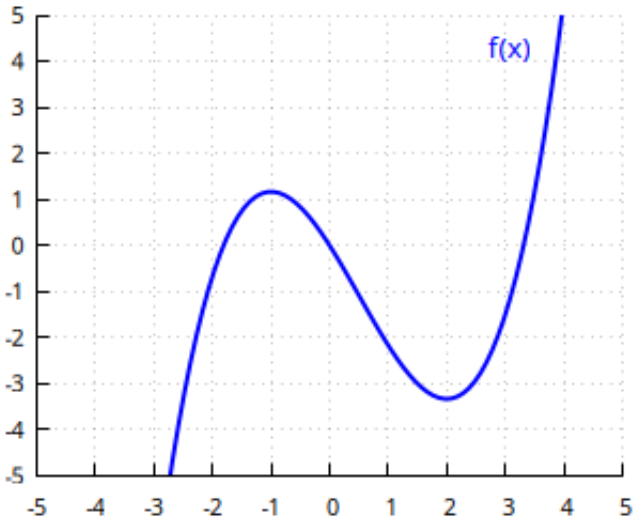
$f(x)$ est croissante lorsque $x < -1$ et lorsque $x > 2$.

$f(x)$ est décroissante lorsque $-1 < x < 2$.

Donc, il doit y avoir un maximum local en $x = -1$ et un minimum local en $x = 2$.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$f(0) = 0$



Exemple 4 : La température d'une personne atteinte d'une certaine souche de grippe peut être approximée par la fonction $T(d) = -\frac{5}{18}d^2 + \frac{15}{9}d + 37$, où $0 < d < 6$; T représente la température de la personne, en degrés Celsius, et d est le nombre de jours après l'apparition des premiers symptômes. Pendant quel intervalle la température de la personne sera-t-elle croissante?

$$T'(d) = -\frac{5}{9}d + \frac{15}{9}$$

Trouvons les nombres critiques :

$$0 = -\frac{5}{9}d + \frac{15}{9}$$
$$\frac{5}{9}d = \frac{15}{9}$$
$$5d = 15$$

$d = 3$ est un nombre critique

Valeur test pour x	1	4
$T'(d)$	+	−
$T(d)$	Croissante	Décroissante

Donc, la température d'une personne sera croissante pendant les 3 premiers jours.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.