1.6 Leçon sur les applications des taux de changement avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Applications des taux de changement

Exemple 1 : Supposons que la fonction $V(t) = \frac{50\,000 + 6t}{1 + 0.4t}$ représente la valeur, V, en dollars, d'une voiture neuve t années après son achat.

a) Quel est le taux de changement de la valeur de la voiture à 2 ans? 5 ans? Et 7 ans?

$$V'(t) = \frac{6(1 + 0.4t) - 0.4(50\,000 + 6t)}{(1 + 0.4t)^2}$$
$$V'(t) = \frac{6 + 2.4t - 20\,000 - 2.4t}{(1 + 0.4t)^2}$$
$$V'(t) = \frac{-19\,994}{(1 + 0.4t)^2}$$
$$V'(2) = \frac{-19\,994}{[1 + 0.4(2)]^2} \cong -6170.99 \text{ dollars/année}$$
$$V'(5) = \frac{-19\,994}{[1 + 0.4(5)]^2} \cong -2221.56 \text{ dollars/année}$$
$$V'(7) = \frac{-19\,994}{[1 + 0.4(7)]^2} \cong -1384.63 \text{ dollars/année}$$

b) Quelle était la valeur initiale de la voiture?

$$V(0) = \frac{50\,000 + 6(0)}{1 + 0.4(0)} = 50\,000 \text{ dollars}$$

Exemple 2 : L'énergie cinétique, K, est l'énergie due au mouvement. Lorsqu'un objet est en mouvement, son énergie cinétique est déterminée par la formule $K(v) = 0.5mv^2$, où K est en joules, m est la masse de l'objet, en kilogrammes; et v est la vitesse de l'objet, en mètres par seconde.

Supposons qu'une balle d'une masse de 0,35 kg est lancée verticalement vers le haut avec une vitesse initiale de 40 m/s. Sa fonction de vitesse est $v(t) = 40 - 9.8t$, où t est le temps, en secondes.

a) Exprimez l'énergie cinétique de la balle en fonction du temps.

$$K[v(t)] = K(t) = 0.5(0.35)(40 - 9.8t)^2$$
$$K(t) = 0.175(40 - 9.8t)^2$$

b) Déterminez le taux de changement de l'énergie cinétique de la balle à 3 secondes.

$$K'(t) = 2(0.175)(40 - 9.8t)(-9.8)$$
$$K'(t) = -3.43(40 - 9.8t)$$
$$K'(3) = -3.43[40 - 9.8(3)]$$
$$K'(3) = -36.358$$

À 3 secondes, le taux de changement de l'énergie cinétique de la balle diminue de 36,358 J/s.

Densité linéique :

La densité linéique d'un objet fait référence à la masse d'un objet par unité de longueur. Supposons que la fonction $f(x)$ donne la masse, en kg, des premiers x mètres d'un objet. Pour la partie de l'objet comprise entre x_1 et x_2, la densité linéique moyenne $= \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$. La fonction dérivée correspondante $f'(x)$ est la densité linéique, le taux de changement de la masse à une longueur x donnée.

Exemple 3 : La masse, en kg, des premiers x mètres d'un fil peut être modélisée par la fonction $f(x) = \sqrt{3x + 1}$.

a) Déterminez la densité linéique moyenne de la partie du fil de $x = 5$ à $x = 8$.

$$\text{densité linéique moyenne} = \frac{f(8) - f(5)}{8 - 5} = \frac{\sqrt{3(8) + 1} - \sqrt{3(5) + 1}}{3} = \frac{1}{3}$$

ou environ 0,333 kg/m.

b) Déterminez la densité linéique à $x = 5$ et $x = 8$. Qu'est-ce que ces résultats révèlent au sujet du fil.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(3x + 1)^{-\frac{1}{2}}(3)$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$$f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$
$$f'(5) = \frac{3}{2\sqrt{3(5)+1}}$$
$$f'(5) = \frac{3}{8} \text{ ou } 0.375 \text{ kg/m}$$
$$f'(8) = \frac{3}{2\sqrt{3(8)+1}}$$
$$f'(8) = \frac{3}{10} \text{ ou } 0.3 \text{ kg/m}$$

Les densités linéiques sont différentes. Par conséquent, le matériau dont est fait le fil est non homogène.

Partie 2 : Applications commerciales

Terminologie :

- La fonction de demande, ou fonction de prix, est $p(x)$, où x est le nombre d'unités d'un produit ou d'un service qui peuvent être vendues à un prix donné, p.
- La fonction de revenu est $R(x) = x \cdot p(x)$, où x est le nombre d'unités d'un produit ou d'un service vendues à un prix unitaire de $p(x)$.
- La fonction de coût, $C(x)$, est le coût total de production de x unités d'un produit ou d'un service.
- La fonction de profit, $P(x)$, est le profit réalisé sur la vente de x unités d'un produit ou d'un service. La fonction de profit est la différence entre la fonction de revenu et la fonction de coût : $P(x) = R(x) - C(x)$

Les économistes utilisent le mot *marginal* pour désigner la dérivée d'une fonction commerciale.

- $C'(x)$ est la fonction de coût marginal et représente le taux de changement instantané du coût total par rapport au nombre d'articles produits.
- $R'(x)$ est la fonction de revenu marginal et représente le taux de changement instantané du revenu total par rapport au nombre d'articles vendus.
- $P'(x)$ est la fonction de profit marginal et représente le taux de changement instantané du profit total par rapport au nombre d'articles vendus.

Exemple 4 : Une entreprise vend 1500 DVD de films par mois à 10 dollars chacun. Une étude de marché a démontré que les ventes diminueront de 125 DVD par mois pour chaque augmentation de 0,25 dollar du prix.

a) Déterminez une fonction de demande (ou de prix).

Soit x le nombre de DVD vendus par mois. Soit p le prix d'un DVD. Soit n le nombre d'augmentations de 0,25 dollar.

Équation 1 : $x = 1500 - 125n$

Équation 2 : $p = 10 + 0.25n$

Récrivons le prix (p) en fonction du nombre de DVD vendus par mois (x) :

De l'Équation 1 : $n = \frac{1500 - x}{125}$

En substituant dans l'Équation 2 :

$$p = 10 + 0.25\left(\frac{1500 - x}{125}\right) = 10 + 0.002(1500 - x) = 10 + 3 - 0.002x = 13 - 0.002x$$

La fonction de demande (prix) est $p(x) = 13 - 0.002x$. Cela donne le prix d'un DVD lorsque x DVD sont vendus.

b) Déterminez le revenu marginal lorsque les ventes sont de 1000 DVD par mois.

$$R(x) = x \cdot p(x)$$
$$R(x) = x(13 - 0.002x)$$
$$R(x) = -0.002x^2 + 13x$$
$$R'(x) = -0.004x + 13$$
$$R'(1000) = -0.004(1000) + 13$$
$$R'(1000) = 9$$

Lorsque les ventes sont de 1000 DVD, le revenu augmente à un taux de 9 dollars par DVD supplémentaire vendu.

c) Le coût de production de x DVD est $C(x) = -0.004x^2 + 9.2x + 5000$. Déterminez le coût marginal lorsque la production

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

est de 1000 DVD par mois.

$$C'(x) = -0.008x + 9.2$$
$$C'(1000) = -0.008(1000) + 9.2$$
$$C'(1000) = 1.2$$

Lorsque la production est de 1000 DVD par mois, le coût augmente de 1,20 dollar pour chaque DVD supplémentaire produit.

d) Déterminez le coût réel de production du 1001e DVD.

$$C(1001) - C(1000) = \left[-0.004(1001)^2 + 9.2(1001) + 5000\right] - \left[-0.004(1000)^2 + 9.2(1000) + 5000\right]$$
$$C(1001) - C(1000) = 10201.196 - 10200.00$$
$$C(1001) - C(1000) = 1.196$$

Le coût réel de production du 1001e DVD est de 1,196 dollar. Remarquez la similitude entre le coût marginal du 1000e DVD et le coût réel de production du 1001e DVD. Pour de grandes valeurs de x, le coût marginal lors de la production de x articles est approximativement égal au coût de production d'un article de plus, le $(x + 1)$e article.

e) Déterminez le profit et le profit marginal pour des ventes mensuelles de 1000 DVD.

$$P(x) = R(x) - C(x)$$
$$P(x) = -0.002x^2 + 13x - (-0.004x^2 + 9.2x + 5000)$$
$$P(x) = 0.002x^2 + 3.8x - 5000$$
$$P(1000) = \left[0.002(1000)^2 + 3.8(1000) - 5000\right]$$
$$P(1000) = 800$$

Le profit si 1000 DVD sont vendus est de 800 dollars.

$$P'(x) = 0.004x + 3.8$$
$$P'(1000) = 0.004(1000) + 3.8$$
$$P'(1000) = 7.80$$

Si 1000 DVD sont vendus, le profit augmente à un taux de 7,80 dollars par DVD supplémentaire vendu.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.