1.1 Leçon sur les dérivées de fonctions polynomiales avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Le quotient de Newton et la dérivée

En fonctions avancées, vous avez appris que le taux de variation instantané est représenté par la pente de la tangente en un point de la courbe. Vous avez également appris que vous pouvez déterminer cette valeur en calculant la dérivée de la fonction à l'aide du quotient de Newton.

Quotient de Newton :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Exemple du quotient de Newton :

a) Déterminez l'équation de la dérivée de $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$

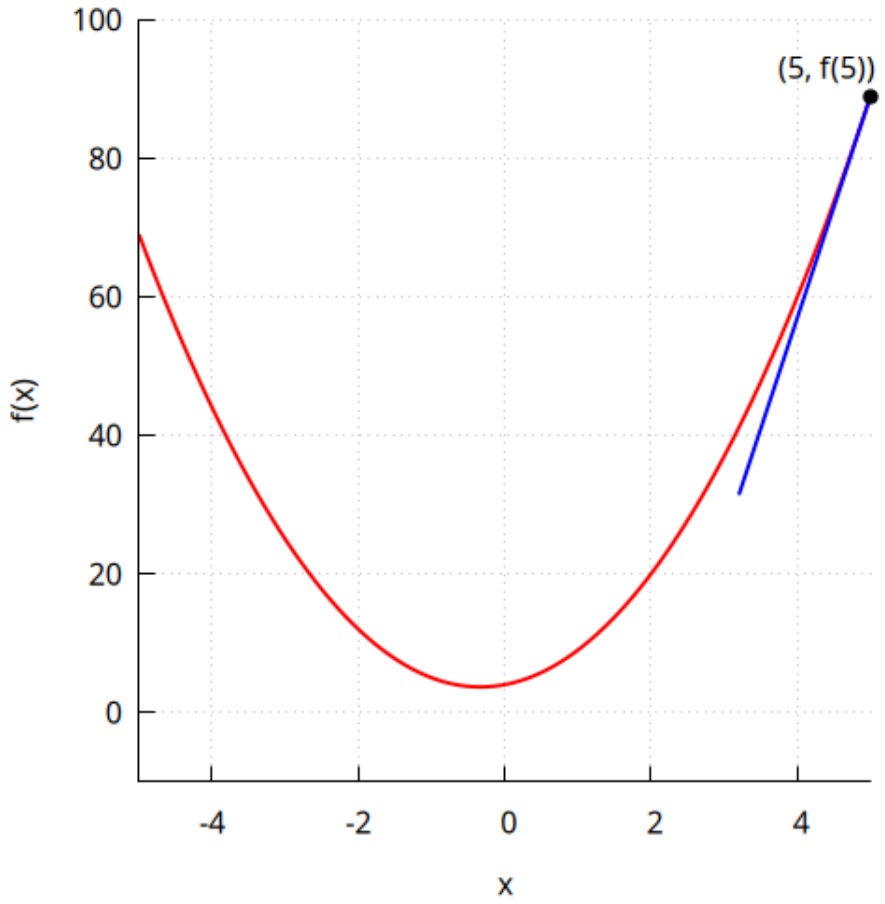
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3(x+h)^2 + 2(x+h) + 4 - (3x^2 + 2x + 4)}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) + 2x + 2h + 4 - 3x^2 - 2x - 4}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 + 2x + 2h + 4 - 3x^2 - 2x - 4}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{6xh + 3h^2 + 2h}{h}$$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(6x + 3h + 2)}{h}$$
$$f'(x) = 6x + 3(0) + 2$$
$$f'(x) = 6x + 2$$

b) Calculez $f'(5)$. Que représente cette valeur?

$$f'(5) = 6(5) + 2$$
$$f'(5) = 32$$

Cela signifie que le taux de variation instantané de la fonction originale lorsque $x = 5$ est 32. Graphiquement, cela signifie que la pente de la tangente tracée sur la fonction originale au point $(5,\ f(5))$ est 32.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



Règles pour trouver les dérivées

Les mathématiciens ont établi un ensemble de règles pour calculer les dérivées plus efficacement.

Règle	Dérivée	Exemple
Règle de la constante Si $f(x) = c$ où c est une constante	$f'(x) = 0$	$f(x) = 87$ $f'(x) = 0$
Règle de la puissance Si $f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$f(x) = x^5$ $f'(x) = 5x^4$
Règle du multiple constant Si $f(x) = c \cdot g(x)$ où c est une constante	$f'(x) = c \cdot g'(x)$	$f(x) = 3x^5$ $f'(x) = 3 \cdot 5x^4$ $f'(x) = 15x^4$
Règle de la somme Si $h(x) = f(x) + g(x)$	$h'(x) = f'(x) + g'(x)$	$h(x) = x^5 + x^4$ $h'(x) = 5x^4 + 4x^3$
Règle de la différence Si $h(x) = f(x) - g(x)$	$h'(x) = f'(x) - g'(x)$	$h(x) = x^5 - x^4$ $h'(x) = 5x^4 - 4x^3$

Démonstration de la règle de la puissance :

Utilisez le théorème du binôme : $t_{r+1} = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$

$$\frac{d}{dx} x^n = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$\frac{d}{dx} x^n = \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{0} x^n h^0 + \binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n - x^n}{h}$$

$$\frac{d}{dx} x^n = \lim_{h \to 0} \frac{\binom{n}{1} x^{n-1} h^1 + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \cdots + \binom{n}{n} x^0 h^n}{h}$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$$\frac{d}{dx}x^n = \lim_{h\to 0}\frac{h\left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^0h^{n-1}\right]}{h}$$
$$\frac{d}{dx}x^n = \lim_{h\to 0}\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^0h^{n-1}$$
$$\frac{d}{dx}x^n = \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}0^1 + \cdots + \binom{n}{n}x^00^{n-1}$$
$$\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$$

Exemple 1 : Déterminez l'équation de la dérivée de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x^5$

$$f'(x) = 15x^4$$

b) $f(x) = 71$

$$f'(x) = 0$$

c) $f(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = x^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

d) $y = \sqrt[3]{x}$

$$y = x^{\frac{1}{3}}$$
$$y' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$$
$$y' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$
$$y' = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

e) $y = \frac{1}{x}$

$$y = x^{-1}$$
$$y' = -1x^{-2}$$
$$y' = \frac{-1}{x^2}$$

f) $y = -\frac{1}{x^5}$

$$y = -1x^{-5}$$
$$\frac{dy}{dx} = 5x^{-6}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{5}{x^6}$$

Exemple 2 : Dérivez chaque fonction

a) $y = 5x^6 - 4x^3 + 6$

$$y' = 30x^5 - 12x^2 + 0$$
$$y' = 30x^5 - 12x^2$$

b) $f(x) = -3x^5 + 8\sqrt{x} - 9.3$

$$f(x) = -3x^5 + 8x^{\frac{1}{2}} - 9.3$$
$$f'(x) = -15x^4 + 4x^{-\frac{1}{2}} - 0$$
$$f'(x) = -15x^4 + \frac{4}{\sqrt{x}}$$

c) $g(x) = (2x-3)(x+1)$

$$g(x) = 2x^2 - x - 3$$
$$g'(x) = 4x - 1$$

d) $h(x) = \frac{-8x^6 + 8x^2}{4x^5}$

$$h(x) = \frac{-8x^6}{4x^5} + \frac{8x^2}{4x^5}$$
$$h(x) = -2x + 2x^{-3}$$
$$h'(x) = -2 - 6x^{-4}$$
$$h'(x) = -2 - \frac{6}{x^4}$$

Exemple 3 : Déterminez une équation de la tangente à la courbe $f(x) = 4x^3 + 3x^2 - 5$ en $x = -1$.

Point sur la tangente :

$$f(-1) = 4(-1)^3 + 3(-1)^2 - 5$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$$f(-1) = -6$$
$$(-1, -6)$$

Pente de la tangente :

$$f'(x) = 12x^2 + 6x$$
$$f'(-1) = 12(-1)^2 + 6(-1)$$
$$f'(-1) = 6$$

La pente de la tangente est 6

Rappel : l'équation de la dérivée vous donne la pente de la tangente à la fonction originale.

Équation de la tangente :

$$y = mx + b$$
$$-6 = 6(-1) + b$$
$$b = 0$$
$$y = 6x$$

Exemple 4 : Déterminez le(s) point(s) sur le graphique de $y = x^2(x+3)$ où la pente de la tangente est 24.

$$y = x^3 + 3x^2$$
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 6x$$
$$24 = 3x^2 + 6x$$
$$0 = 3x^2 + 6x - 24$$
$$0 = 3(x^2 + 2x - 8)$$
$$0 = (x+4)(x-2)$$
$$x_1 = -4 \qquad x_2 = 2$$

Trouvons maintenant les coordonnées y des points :

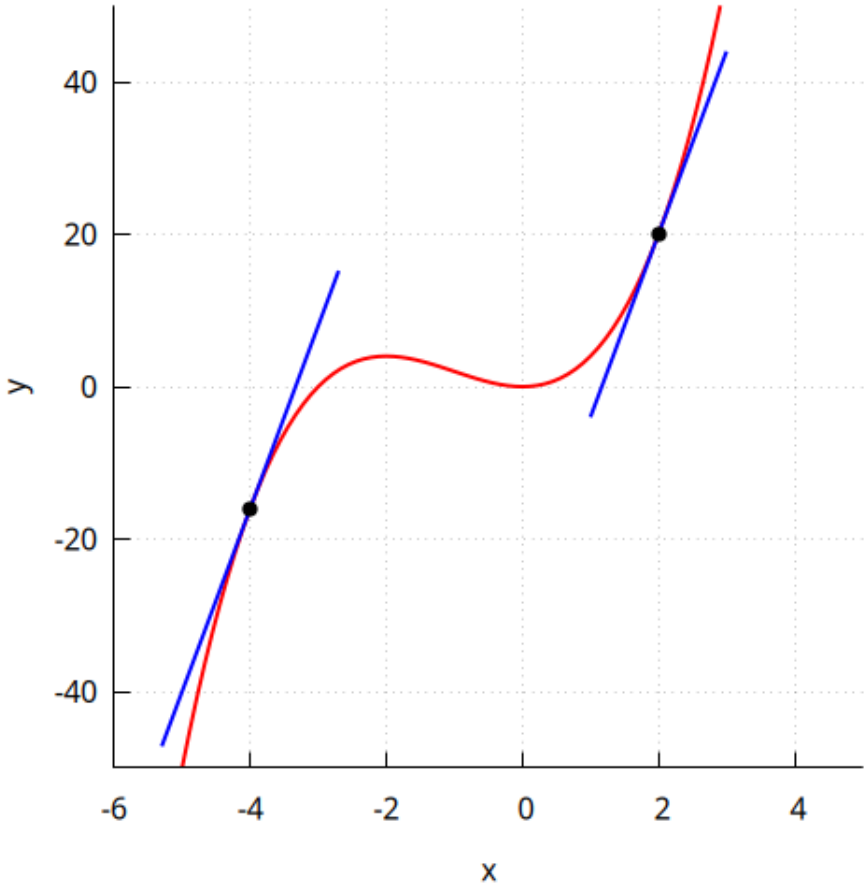
Point 1 :

$$y = (-4)^3 + 3(-4)^2$$
$$y = -16$$
$$(-4, -16)$$

Point 2 :

$$y = (2)^3 + 3(2)^2$$
$$y = 20$$
$$(2, 20)$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



Droits d’auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.