Leçon de révision de l'examen de calcul et vecteurs de douzième année (Unités 1 à 3) avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Révision pour l'examen de mi-session de calcul

1) Dérivez chacune des expressions suivantes par rapport à x.

a) $y = 4$ $y' = 0$	**b)** $y = 3x$ $y' = 3$	**c)** $y = 5x^3 + 3x - 7$ $y' = 15x^2 + 3$
d) $y = \frac{3x^2}{2}$ $y' = 3x$	**e)** $y = \frac{3}{x^4}$ $y = 3x^{-4}$ $y' = \frac{-12}{x^5}$	**f)** $y = 4\sqrt[3]{x} - 8$ $y = 4x^{1/3} - 8$ $y' = \frac{4}{3x^{2/3}}$
g) $y = (2x + 3)(5x - 1)$ $y' = 2(5x - 1) + 5(2x + 3)$ $y' = 20x + 13$	**h)** $y = (4x^2 - x + 2)(x - 3)$ $y' = (8x - 1)(x - 3) + 1(4x^2 - x + 2)$ $y' = 12x^2 - 26x + 5$	**i)** $y = (2x + 1)(x^2 - 3)(3x - 2)$ $y' = (6x^2 + 2x - 6)(3x - 2) + 3(2x + 1)(x^2 - 3)$ $y' = 24x^3 - 3x^2 - 40x + 3$
j) $y = (3x - 2)^2$ $y' = 2(3x - 2)(3)$ $y' = 18x - 12$	**k)** $y = \sqrt{2x - 5}$ $y' = \frac{1}{2}(2x - 5)^{-1/2}(2)$ $y' = \frac{1}{\sqrt{2x - 5}}$	**l)** $y = \frac{1}{(4x^2 - 3x)^3}$ $y' = -3(4x^2 - 3x)^{-4}(8x - 3)$ $y' = \frac{-3(8x - 3)}{(4x^2 - 3x)^4}$
m) $y = (x^2 + 2x)^3(4x + 1)^2$ $y' = 3(x^2 + 2x)^2(2x + 2)(4x + 1)^2 + 2(4x + 1)(4)(x^2 + 2x)^3$ $y' = 2(x^2 + 2x)^2(4x + 1)(16x^2 + 23x + 3)$	**n)** $y = \frac{2x}{x - 5}$ $y' = \frac{2(x - 5) - 1(2x)}{(x - 5)^2}$ $y' = \frac{-10}{(x - 5)^2}$	**o)** $y = \frac{3x}{x^2 + 2x - 4}$ $y' = \frac{3(x^2 + 2x - 4) - (2x + 2)(3x)}{(x^2 + 2x - 4)^2}$ $y' = \frac{-3(x^2 + 4)}{(x^2 + 2x - 4)^2}$
p) $y = \frac{3x}{(x - 2)^2}$ $y' = \frac{3(x - 2)^2 - 2(x - 2)(3x)}{(x - 2)^4}$ $y' = \frac{-3(x + 2)}{(x - 2)^3}$	**q)** $y = \left[\frac{1}{(4x + x^2)^3}\right]^3$ $y' = -9(4x + x^2)^{-10}(4 + 2x)$ $y' = \frac{-18(2 + x)}{(4x + x^2)^{10}}$	**r)** $y = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{x}{\sqrt{3}} + 6\sqrt[3]{x}$ $y' = -x^{-3/2} + \frac{1}{\sqrt{3}} + 2x^{-2/3}$ $y' = \frac{-1}{x^{3/2}} + \frac{2}{x^{2/3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$

2) Déterminez $f''(-1)$ pour la fonction $f(x) = \frac{3}{(2x - 3)^2}$.

$f(x) = 3(2x - 3)^{-2}$

$f'(x) = -6(2x - 3)^{-3}(2) = -12(2x - 3)^{-3}$

$f''(x) = 36(2x - 3)^{-4}(2) = \frac{72}{(2x - 3)^4}$

$f''(-1) = \frac{72}{[2(-1) - 3]^4} = \frac{72}{625}$

3) Déterminez l'équation de la tangente à la courbe $y = (2x^2 - 3)(x + 1)^2$ au point où $x = 1$.

Point : $y(1) = [2(1)^2 - 3](1 + 1)^2 = -4$, donc le point est $(1, -4)$.

$y' = 4x(x + 1)^2 + 2(x + 1)(2x^2 - 3)$

$y'(1) = 4(1)(2)^2 + 2(2)[2(1)^2 - 3] = 16 + 4(-1) = 12$

En utilisant $y = mx + b$: $-4 = 12(1) + b \Rightarrow b = -16$

$y = 12x - 16$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

4) Pour quelles valeurs de x la courbe $y = -x^3 + 6x^2$ a-t-elle une tangente de pente 12?

$y' = -3x^2 + 12x$

$12 = -3x^2 + 12x$

$0 = -3x^2 + 12x - 12 = -3(x-2)^2$

$x = 2$

5) Une tangente à la parabole $y = 3x^2 - 7x + 5$ est perpendiculaire à $x + 5y - 10 = 0$. Déterminez l'équation de la tangente.

La droite $x + 5y - 10 = 0$ a une pente $y = -\frac{1}{5}x + 2$, donc $m = -\frac{1}{5}$; la pente perpendiculaire est $m_\perp = 5$.

$y' = 6x - 7 = 5 \Rightarrow x = 2$

$y(2) = 3(2)^2 - 7(2) + 5 = 3$, donc le point est $(2,\ 3)$.

$3 = 5(2) + b \Rightarrow b = -7$

$y = 5x - 7$

6) On vide de l'eau par le bas d'un réservoir. L'équation donnant le volume V d'eau, en litres, restant dans le réservoir après t minutes est $V(t) = 3000\left(1 - \frac{t}{10}\right)^2$, $0 \le t \le 10$.

a) Déterminez le volume d'eau dans le réservoir après 5 min.

$V(5) = 3000\left(1 - \frac{5}{10}\right)^2 = 750$ L

b) Déterminez le taux auquel l'eau s'écoule du réservoir après **i)** 3 min **ii)** 8 min

$V'(t) = 6000\left(1 - \frac{t}{10}\right)\left(-\frac{1}{10}\right) = -600\left(1 - \frac{t}{10}\right)$

i) $V'(3) = -420$ L/min

ii) $V'(8) = -120$ L/min

7) Pour la fonction $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$, déterminez les points où la tangente est horizontale.

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$0 = 3x^2 - 2x - 1 = (x-1)(3x+1)$

$x = 1$ ou $x = -\frac{1}{3}$

$f(1) = 0, \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{27}$

Les points sont $(1,\ 0)$ et $\left(-\frac{1}{3},\ \frac{32}{27}\right)$.

8) La quantité de pollution dans un certain lac est $P(t) = \left(t^{1/4} + 3\right)^3$, où t est mesuré en années et P est mesuré en parties par million (ppm). À quel taux la quantité de pollution change-t-elle après 16 ans?

$P'(t) = 3\left(t^{1/4} + 3\right)^2\left(\frac{1}{4}t^{-3/4}\right)$

$P'(16) = 3\left(16^{1/4} + 3\right)^2\left[\frac{1}{4}(16)^{-3/4}\right] = \frac{75}{32} \approx 2.34$ ppm/année

9) Un objet se déplace en ligne droite, et sa position, s, en mètres après t secondes, est $s(t) = 8 - 7t - t^2$.

a) Déterminez la vitesse lorsque $t = 5$.

$v(t) = s'(t) = -7 - 2t \Rightarrow v(5) = -7 - 2(5) = -17$ m/s

b) Déterminez l'accélération lorsque $t = 5$.

$a(t) = v'(t) = -2 \Rightarrow a(5) = -2$ m/s^2

10) Un magasin vend 250 paires de chaussures de course de marque X chaque mois lorsqu'elles sont au prix de 100 $ la paire. On a déterminé que pour chaque baisse de prix de 5 $, 20 paires supplémentaires seront vendues.

a) Déterminez la fonction de demande ou de prix.

Soit x = le nombre vendu, n = le nombre de baisses de prix de 5 $. $x = 250 + 20n \Rightarrow n = \frac{x - 250}{20}$

$p(x) = 100 - 5\left(\frac{x - 250}{20}\right) = 100 - \frac{x - 250}{4}$

$p(x) = -0.25x + 162.5$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

b) Déterminez la fonction de revenu.

$R(x) = x \cdot p(x) = x(-0.25x + 162.5)$

$R(x) = -0.25x^2 + 162.5x$

c) Déterminez le revenu lorsque les ventes sont de 250 paires et de 290 paires de chaussures par mois.

$R(250) = \$25\,000 \qquad R(290) = \$26\,100$

d) Déterminez le revenu marginal lorsque les ventes sont de 290 paires de chaussures par mois.

$R'(x) = -0.5x + 162.5 \Rightarrow R'(290) = \$17.50$ par paire vendue

11) Un théâtre a constaté que si le prix d'un billet est de 24 $, 400 billets seront vendus. Pour chaque baisse de prix de 2 $, 50 billets supplémentaires seront vendus.

a) Déterminez la fonction de demande ou de prix en fonction du nombre de baisses de prix.

Soit x = le nombre de baisses de prix de 2 $: $p(x) = 24 - 2x$

b) Déterminez une fonction de revenu en fonction du nombre de baisses de prix.

Billets vendus $= 400 + 50x$

$R(x) = (24 - 2x)(400 + 50x)$

$R(x) = 9600 + 400x - 100x^2$

c) Déterminez le revenu marginal pour la fonction de revenu élaborée à la partie a).

$R'(x) = 400 - 200x$

d) Quand cette fonction de revenu marginal est-elle égale à zéro? Quel est le revenu total à ce moment? Comment les propriétaires du théâtre peuvent-ils utiliser cette information?

$400 - 200x = 0 \Rightarrow x = 2$, donc le prix est $24 - 2(2) = \$20$.

$R(2) = 9600 + 400(2) - 100(2)^2 = \$10\,000$

Il s'agit de la combinaison prix/revenu qui maximise le revenu total — les propriétaires devraient fixer le prix des billets à 20 $ pour générer le plus grand revenu possible.

e) Si le théâtre a une capacité maximale de 450, quel prix maximisera le revenu?

Contrainte de capacité : $400 + 50x \leq 450 \Rightarrow x \leq 1$. Puisque $R(x)$ est une parabole ouverte vers le bas dont le maximum non contraint se trouve à $x = 2$, R est encore croissante sur $0 \leq x \leq 1$, donc le maximum contraint se produit à $x = 1$.

Prix $= 24 - 2(1) = \$22$

12) Étant donné la fonction de revenu $R(x) = 30x - 0.025x^2$ et la fonction de coût $C(x) = 2x + 5$, où x est le nombre d'articles vendus, déterminez :

a) le revenu et le revenu marginal lorsque 500 articles sont vendus

$R(500) = 30(500) - 0.025(500)^2 = \$8750$

$R'(x) = 30 - 0.05x$

$R'(500) = \$5$ par article vendu

b) le coût et le coût marginal lorsque 500 articles sont produits

$C(500) = 2(500) + 5 = \$1005 \qquad C'(x) = 2 \Rightarrow C'(500) = \$2$ par article vendu

c) le profit et le profit marginal pour des ventes de 500 articles

$P(x) = R(x) - C(x) = 28x - 0.025x^2 - 5$

$P(500) = 28(500) - 0.025(500)^2 - 5 = \$7745$

$P'(x) = 28 - 0.05x \Rightarrow P'(500) = \$3$ par article vendu

13) Déterminez l'équation de toutes les tangentes à la courbe $y = 2x - \frac{8}{x}$ qui ont une pente de 4.

$y' = 2 + 8x^{-2} = 4 \Rightarrow \frac{8}{x^2} = 2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

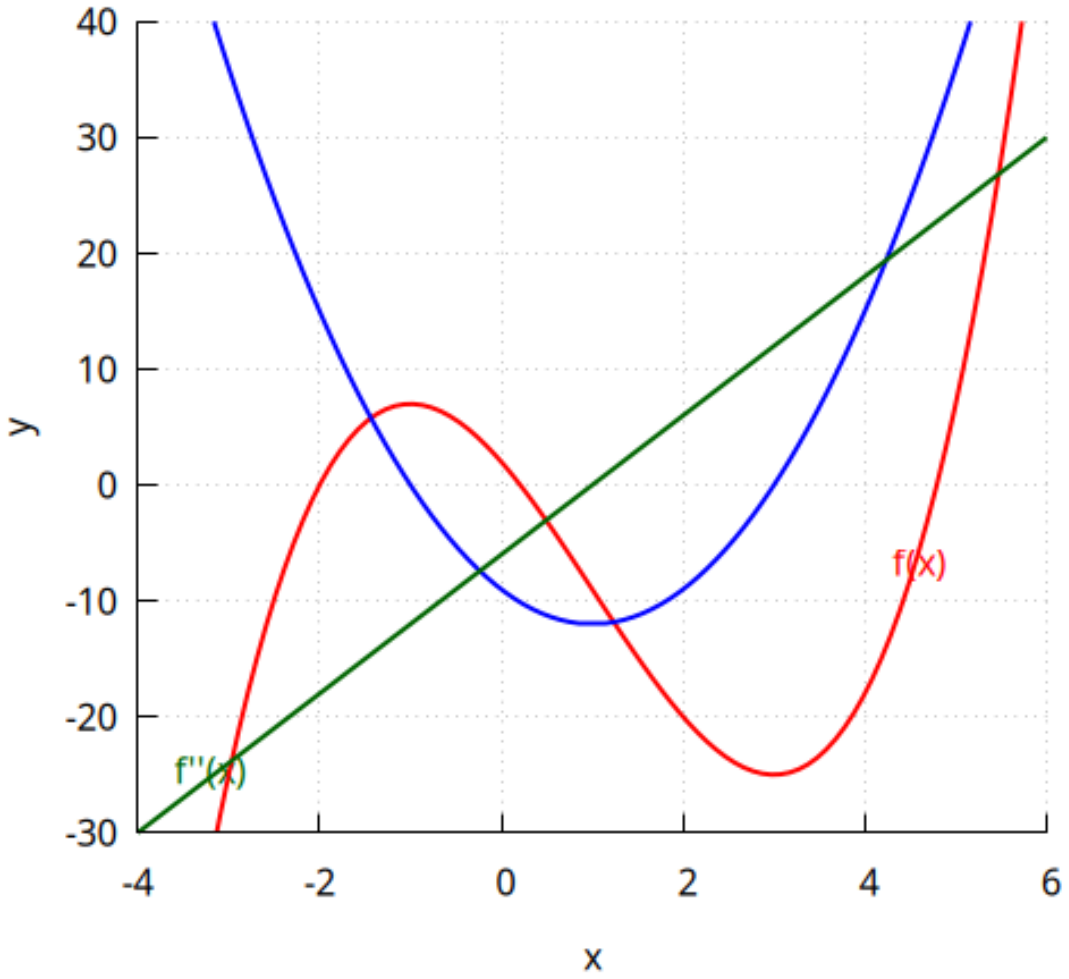
$y(2) = 0, \qquad y(-2) = 0$

Pour $(2,\ 0)$: $0 = 4(2) + b \Rightarrow b = -8 \Rightarrow y = 4x - 8$

Pour $(-2,\ 0)$: $0 = 4(-2) + b \Rightarrow b = 8 \Rightarrow y = 4x + 8$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

14) Esquissez un graphique de la dérivée première et de la dérivée seconde pour la fonction $f(x)$ illustrée :



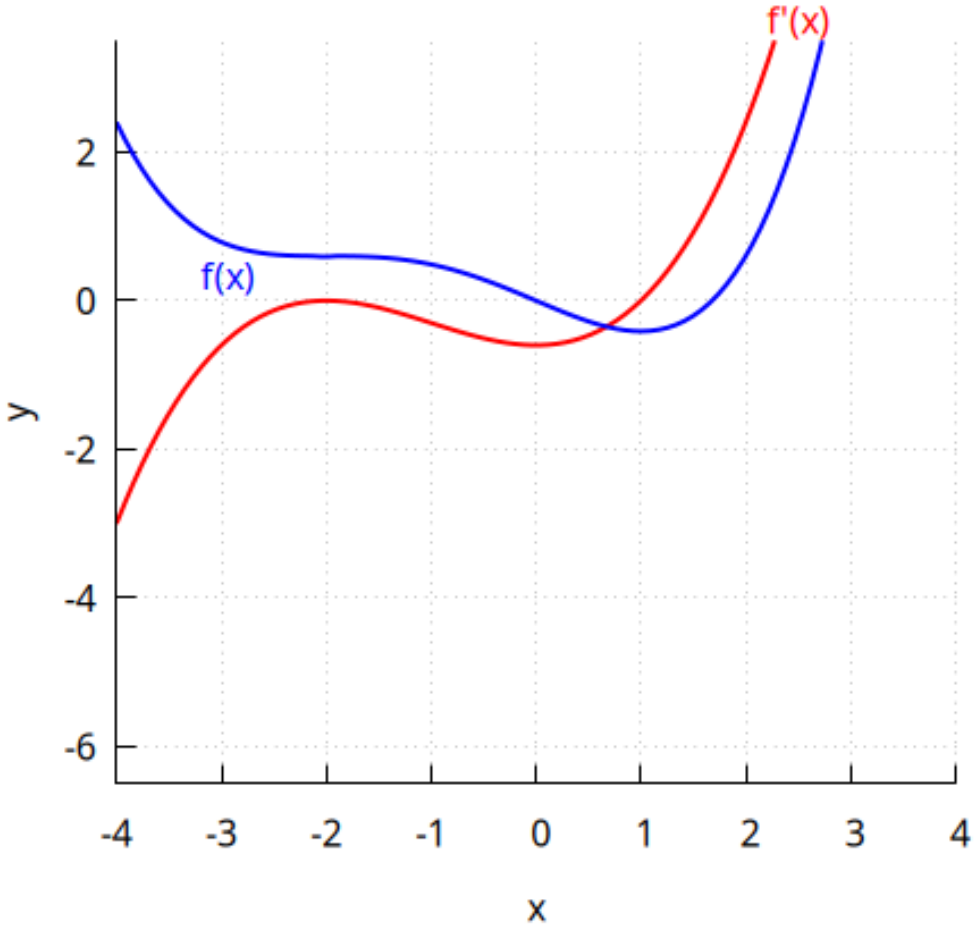
(Une cubique schématique, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$, est utilisée ici pour illustrer la technique — toute cubique correspondant à la forme qualitative du graphique fonctionne de la même façon.)

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$f''(x) = 6x - 6$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

15) À partir du graphique de $f'(x)$, énoncez les intervalles de croissance et de décroissance de la fonction $f(x)$. Esquissez ensuite un graphique possible de $f(x)$.



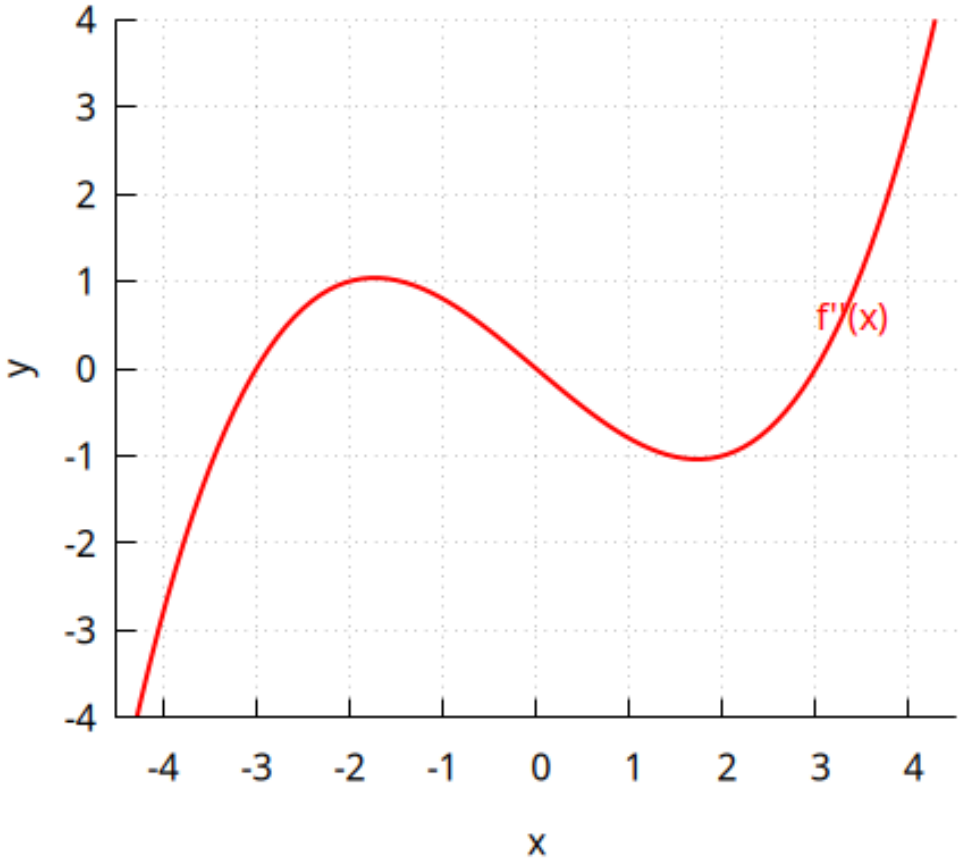
Croissante : $x > 1$

Décroissante : $x < -2, \quad -2 < x < 1$

($f'(x)$ touche zéro sans le traverser en $x = -2$, donc le signe de f' n'y change pas.)

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

16) À partir du graphique de $f''(x)$, énoncez les intervalles de concavité de la fonction $f(x)$.



Concave vers le haut : $-3 < x < 0,\ x > 3$

Concave vers le bas : $x < -3,\ 0 < x < 3$

17) Déterminez les valeurs maximale et minimale absolues de $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ sur l'intervalle $-2 \le x \le 2$.

$f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2) \Rightarrow x = 0,\ x = -2$

Testez les nombres critiques et les extrémités :

$f(-2) = 5, \quad f(0) = 1, \quad f(2) = 21$

Minimum absolu : $(0,\ 1)$ Maximum absolu : $(2,\ 21)$

18) Considérez la fonction définie par $f(x) = -4x^3 + 6x^2 + 2$

a) Déterminez les points critiques et classez-les à l'aide du critère de la dérivée seconde.

$f'(x) = -12x^2 + 12x = -12x(x-1) \Rightarrow x = 0,\ x = 1$

$f(0) = 2, \quad f(1) = 4$

Points critiques : $(0,\ 2)$ et $(1,\ 4)$

$f''(x) = -24x + 12$

$f''(0) = 12 > 0$: $(0,\ 2)$ est un minimum local. $f''(1) = -12 < 0$: $(1,\ 4)$ est un maximum local.

b) Déterminez les points d'inflexion et précisez les intervalles de concavité.

$0 = -24x + 12 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = 3$, point d'inflexion possible en $(0.5,\ 3)$

Concave vers le haut : $x < \frac{1}{2}$ Concave vers le bas : $x > \frac{1}{2}$ Point d'inflexion en $(0.5,\ 3)$

19) Déterminez les extremums locaux de chaque fonction et classez-les comme maximums ou minimums locaux.

a) $y = 81 - x^4$

$y' = -4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0, \quad y(0) = 81$. Critère de la dérivée première : $y' > 0$ pour $x < 0$, $y' < 0$ pour $x > 0$.

Maximum local en $(0,\ 81)$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

b) $f(x) = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x + 9$

$f'(x) = 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24 = 12(x-1)(x+1)(x+2)$

Points critiques en $x = 1,\ -1,\ -2$: $f(1) = -10,\ f(-1) = 22,\ f(-2) = 17$. Le critère de la dérivée première donne le motif de signes $-,\ +,\ -,\ +$ autour de $-2,\ -1,\ 1$.

Minimum local : $(-2,\ 17)$ et $(1,\ -10)$ Maximum local : $(-1,\ 22)$

c) $f(x) = -3x^3 + 9x^2 - 8$

$f'(x) = -9x^2 + 18x = -9x(x-2) \Rightarrow x = 0,\ 2$

$f(0) = -8,\quad f(2) = 4$

Critère de la dérivée seconde : $f''(x) = -18x + 18$. $f''(0) = 18 > 0$ (minimum local en $(0,\ -8)$); $f''(2) = -18 < 0$ (maximum local en $(2,\ 4)$).

20) Déterminez les intervalles sur lesquels chaque fonction est croissante ou décroissante.

a) $y = x^3 - 12x + 8$

$y' = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2) \Rightarrow x = \pm 2$

Croissante : $x < -2,\ x > 2$ Décroissante : $-2 < x < 2$

b) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 - 9x^2$

$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 - 18x = 6x(2x-3)(x+1)$

Nombres critiques : $x = 0,\ 1.5,\ -1$. Motif de signes : $-,\ +,\ -,\ +$ autour de $-1,\ 0,\ 1.5$.

Croissante : $-1 < x < 0,\ x > 1.5$ Décroissante : $x < -1,\ 0 < x < 1.5$

21) Déterminez les points d'inflexion et les intervalles de concavité de chaque fonction.

a) $y = \dfrac{x^4}{3} - 8x^2$

$y'' = 4x^2 - 16 = 4(x-2)(x+2) \Rightarrow x = \pm 2$

$y(\pm 2) = -\dfrac{80}{3}$

Points d'inflexion : $\left(2,\ -\frac{80}{3}\right)$ et $\left(-2,\ -\frac{80}{3}\right)$

Concave vers le haut : $x < -2,\ x > 2$ Concave vers le bas : $-2 < x < 2$

b) $f(x) = x^4 - 8x^3 + 3x - 5$

$f''(x) = 12x^2 - 48x = 12x(x-4) \Rightarrow x = 0,\ 4$

$f(0) = -5,\quad f(4) = -249$

Points d'inflexion : $(0,\ -5)$ et $(4,\ -249)$

Concave vers le haut : $x < 0,\ x > 4$ Concave vers le bas : $0 < x < 4$

22) Esquissez chaque fonction à l'aide de l'algorithme pour l'esquisse de courbes.

a) $h(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4$

Aucune restriction, aucune asymptote. $h(x) = (x+4)(x+1)^2$, donc abscisses à l'origine : $(-4,\ 0),\ (-1,\ 0)$; ordonnée à l'origine : $(0,\ 4)$.

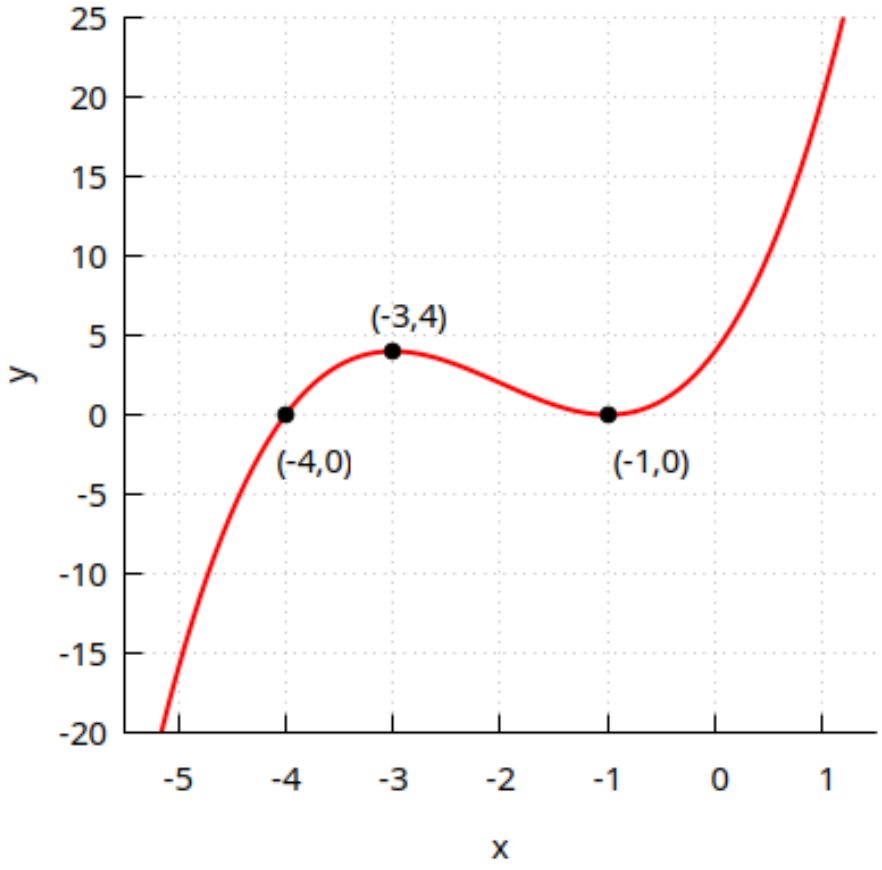
$h'(x) = 3x^2 + 12x + 9 = 3(x+3)(x+1) \Rightarrow x = -3,\ -1$

$h(-3) = 4,\ h(-1) = 0$. Points critiques : $(-3,\ 4)$ (maximum local) et $(-1,\ 0)$ (minimum local).

$h''(x) = 6x + 12 = 0 \Rightarrow x = -2,\quad h(-2) = 2$

Point d'inflexion possible : $(-2,\ 2)$. Décroissante et concave vers le bas à gauche, passant par un maximum, un minimum et un point d'inflexion, croissante et concave vers le haut à droite (voir le graphique).

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



b) $f(x) = -3x^4 - 2x^3 + 15x^2 - 12x + 2$

Aucune restriction, aucune asymptote. Abscisses à l'origine près de $(1,\ 0)$, $(-2.9,\ 0)$, $(0.23,\ 0)$; ordonnée à l'origine : $(0,\ 2)$.

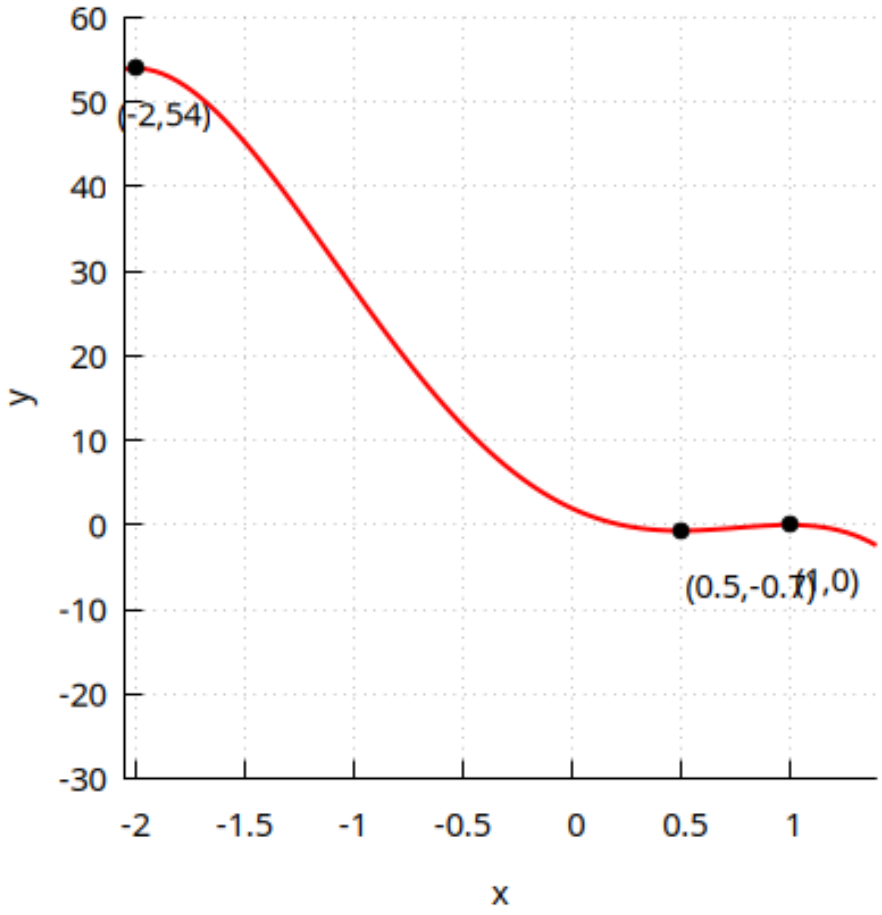
$f'(x) = -12x^3 - 6x^2 + 30x - 12 = -6(x - 1)(2x^2 + 4x - 2)$

Points critiques : $(1,\ 0)$, $(0.5,\ -0.7)$, $(-2,\ 54)$.

$f''(x) = -36x^2 - 12x + 30$

Points d'inflexion possibles : $(0.76,\ -0.3)$ et $(-1.1,\ 31.6)$ (voir le graphique).

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



c) $f(x) = -x^4 - x^3 + 2x^2$

Aucune restriction, aucune asymptote. $f(x) = -x^2(x+2)(x-1)$, donc abscisses à l'origine : $(0,\ 0)$, $(-2,\ 0)$, $(1,\ 0)$; ordonnée à l'origine : $(0,\ 0)$.

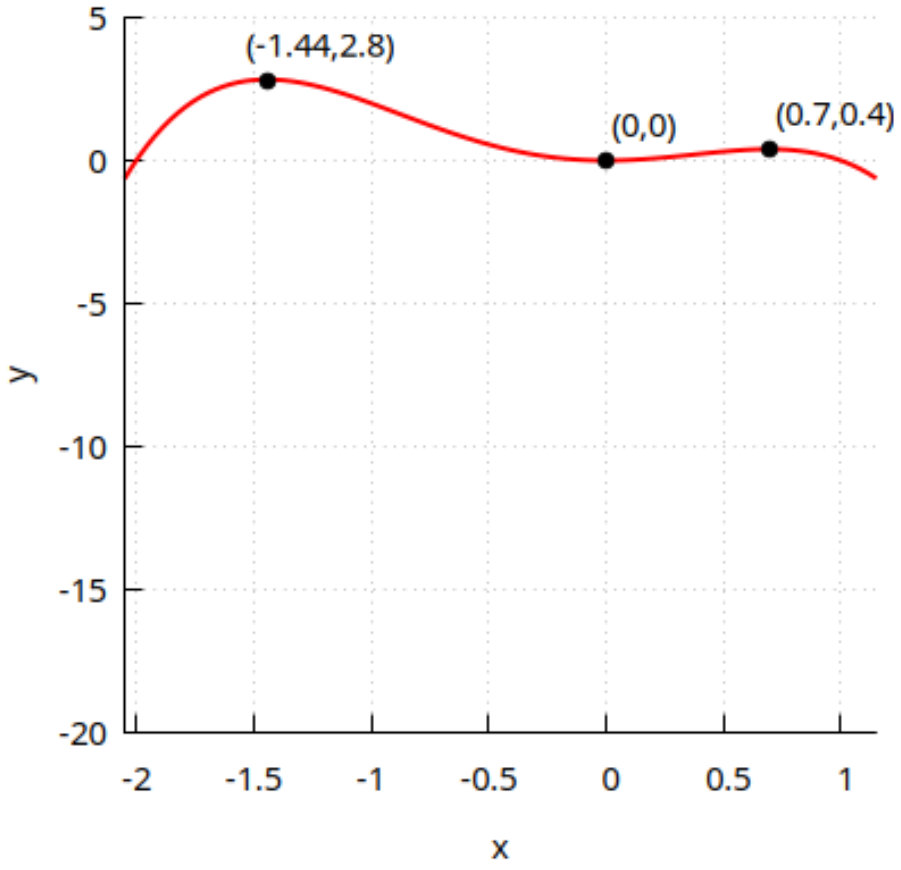
$f'(x) = -4x^3 - 3x^2 + 4x = -x(4x^2 + 3x - 4)$

Points critiques : $(0,\ 0)$, $(0.7,\ 0.4)$, $(-1.44,\ 2.8)$.

$f''(x) = -12x^2 - 6x + 4$

Points d'inflexion possibles : $(0.38,\ 0.21)$ et $(-0.88,\ 1.63)$ (voir le graphique).

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



d) $y = \frac{5x}{x^2 - 1}$

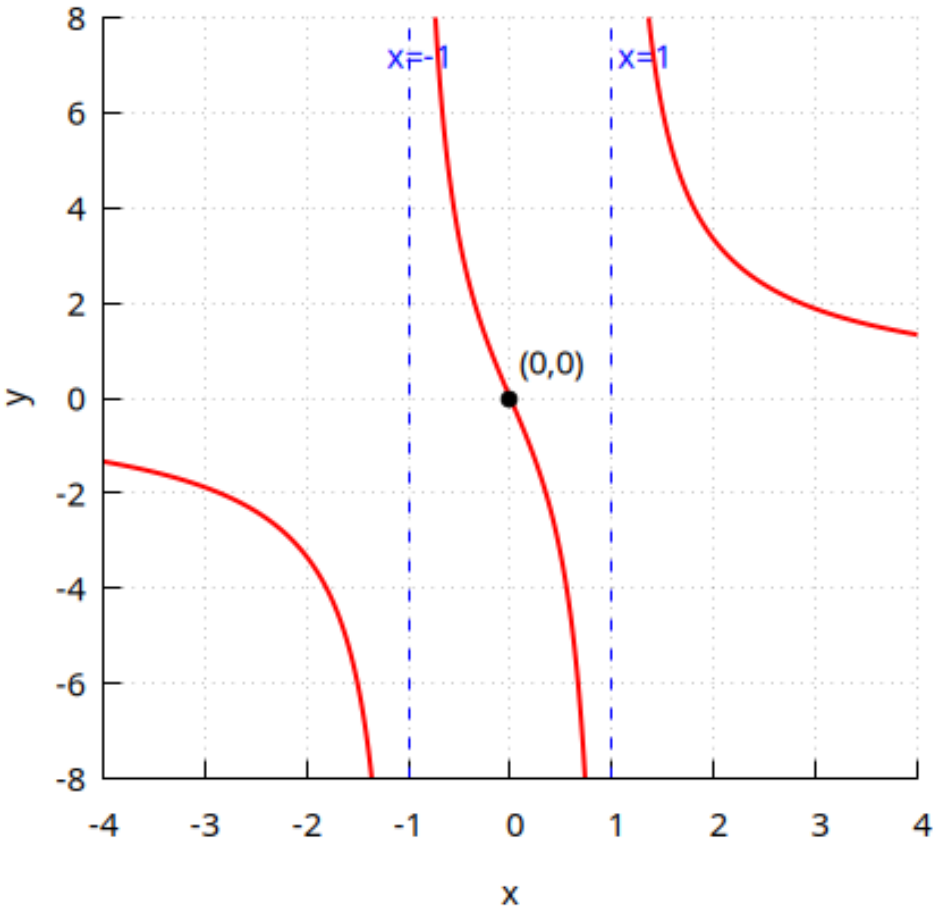
AV : $x = 1$ et $x = -1$ AH : $y = 0$

L'abscisse à l'origine et l'ordonnée à l'origine sont toutes deux $(0, 0)$.

$y' = \frac{5(x^2 - 1) - 2x(5x)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-5(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$

$x^2 + 1 \neq 0$, donc il n'y a aucun point critique. Point d'inflexion possible en $(0, 0)$ (voir le graphique).

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



e) $y = \dfrac{1 - x^2}{x^2 + 1}$

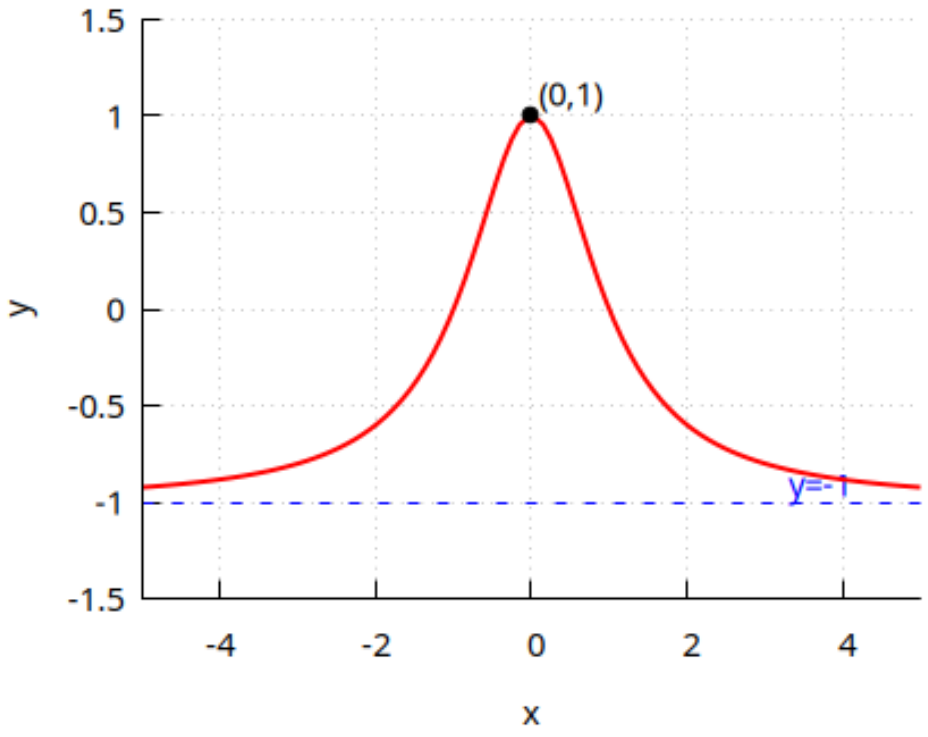
AV : aucune ($x^2 + 1 \neq 0$) AH : $y = -1$

Abscisses à l'origine : $(1,\ 0)$ et $(-1,\ 0)$ Ordonnée à l'origine : $(0,\ 1)$

$y' = \dfrac{-4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0, \quad y(0) = 1$

Point critique : $(0,\ 1)$ (maximum local). Points d'inflexion possibles : $(-0.58,\ 0.5)$ et $(0.58,\ 0.5)$ (voir le graphique).

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



f) $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$

Aucune restriction, aucune asymptote. $f(x) = x^2(3x^2 - 16x + 18)$, abscisses à l'origine : $(0,\ 0)$, $(3.72,\ 0)$, $(1.61,\ 0)$; ordonnée à l'origine : $(0,\ 0)$.

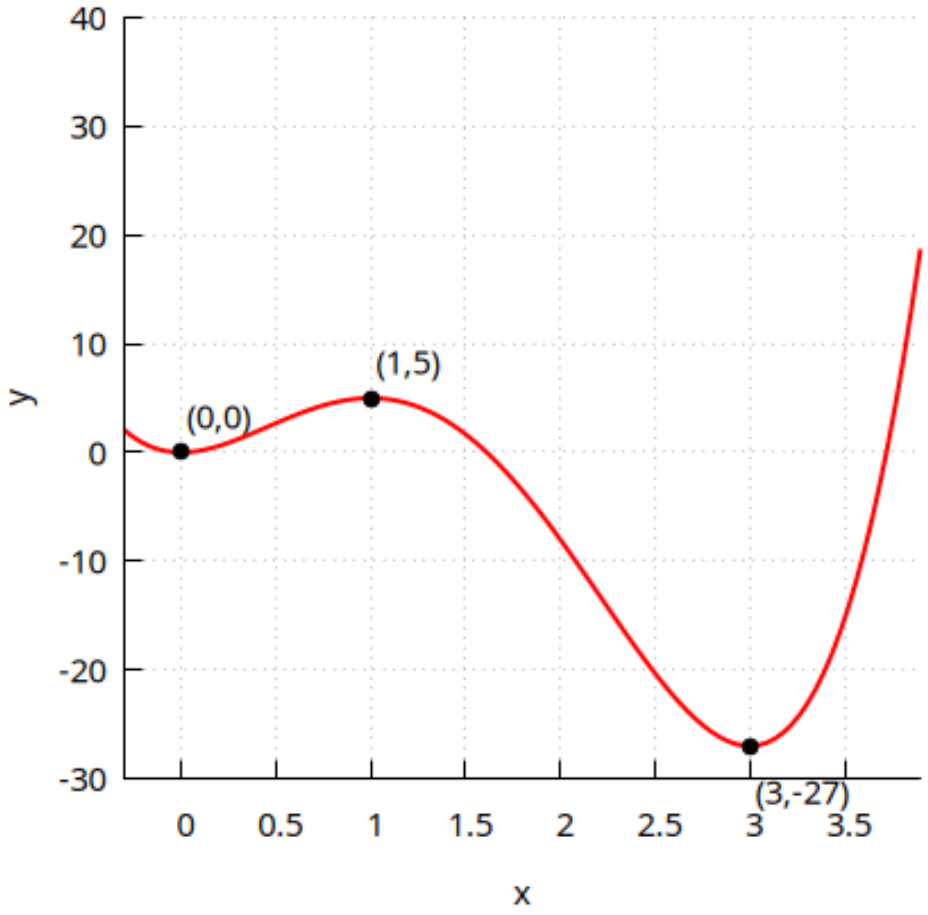
$f'(x) = 12x^3 - 48x^2 + 36x = 12x(x - 3)(x - 1)$

Points critiques : $(0,\ 0)$, $(3,\ -27)$, $(1,\ 5)$.

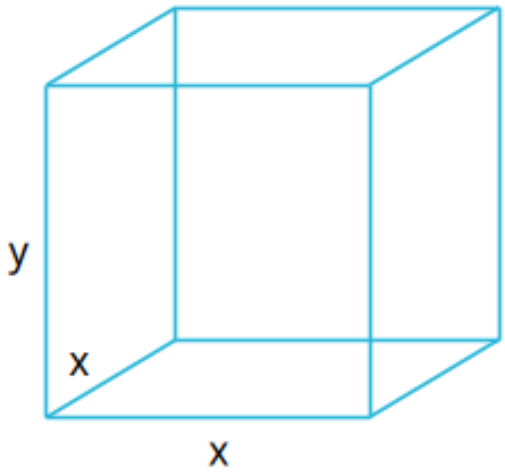
$f''(x) = 36x^2 - 96x + 36$

Points d'inflexion possibles : $(2.2,\ -13)$ et $(0.45,\ 2.3)$ (voir le graphique).

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.



23) Iesha fabrique une boîte à bijoux pour sa mère dans son cours de technologie. Le dessus et le dessous de la boîte seront carrés et faits d'un bois qui coûte 0,002 \$/cm², et les côtés de la boîte seront faits d'un bois moins cher qui coûte 0,001 \$/cm². Déterminez les dimensions de la boîte qui minimiseront le coût si elle veut que la boîte ait un volume de 4800 cm³.



$V = x^2y = 4800 \Rightarrow y = \frac{4800}{x^2}$. Aire de surface : dessus+dessous $= 2x^2$, côtés $= 4xy$.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$C(x) = 0.002(2x^2) + 0.001\left(\frac{19\,200}{x}\right) = 0.004x^2 + \frac{19.2}{x}$

$C'(x) = 0.008x - 19.2x^{-2} = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{19.2}{0.008} = 2400 \Rightarrow x \approx 13.4$ cm

$y = \frac{4800}{13.4^2} \approx 26.7$ cm

$C''(x) = 0.008 + 38.4x^{-3} > 0$ en $x = 13.4$, ce qui confirme un minimum.

Les dimensions qui minimisent le coût sont 13,4 cm par 13,4 cm par 26,7 cm.

24) Une entreprise de fabrication est responsable de concevoir une boîte de conserve de 500 mL pour tomates en dés.

a) Déterminez les dimensions de la boîte de conserve qui minimiseront son aire de surface.

$V = \pi r^2 h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{\pi r^2}$

$SA(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r\left(\frac{500}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$

$SA'(r) = 4\pi r - 1000r^{-2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{1000}{4\pi} \Rightarrow r \approx 4.3$ cm

$h = \frac{500}{\pi(4.3)^2} \approx 8.6$ cm

b) Le couvercle et la base de la boîte de conserve sont faits d'un métal plus résistant qui coûte deux fois plus cher que les côtés. Quelles dimensions minimiseront le coût de production de la boîte de conserve? Comment votre réponse se compare-t-elle à votre réponse de la partie a)?

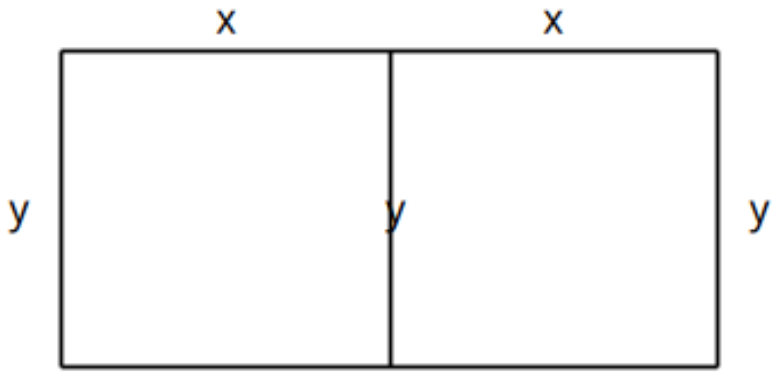
$C(r) = 2(2\pi r^2) + \frac{1000}{r} = 4\pi r^2 + \frac{1000}{r}$

$C'(r) = 8\pi r - 1000r^{-2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{1000}{8\pi} \Rightarrow r \approx 3.4$ cm

$h = \frac{500}{\pi(3.4)^2} \approx 13.8$ cm

En accordant plus de poids au dessus/dessous, la boîte de conserve optimale devient plus étroite et plus haute qu'à la partie a) (on utilise moins du matériau coûteux du dessus/dessous par rapport aux côtés moins chers).

25) Un fermier dispose de 800 m de clôture pour enclore deux enclos rectangulaires. Les enclos doivent avoir des aires égales. Quelles dimensions maximiseront l'aire enclose?



$P = 4x + 3y = 800 \Rightarrow y = \frac{800 - 4x}{3}$. Aire totale $A = 2xy$.

$A(x) = 2x\left(\frac{800 - 4x}{3}\right) = \frac{1600x}{3} - \frac{4x^2}{3}$

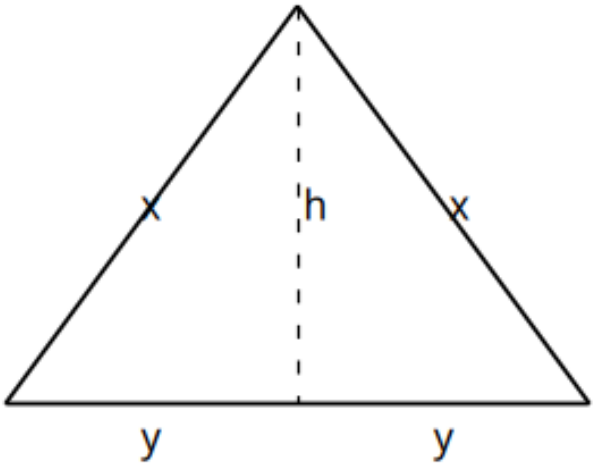
$A'(x) = \frac{1600}{3} - \frac{16x}{3} = 0 \Rightarrow x = 100$ m

$y = \frac{800 - 4(100)}{3} \approx 133.3$ m

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Le rectangle formé par les deux enclos est de 200 m par 133.3 m.

26) Un fil de fer de 200 cm de long doit être plié pour former un triangle isocèle. Quelles devraient être les dimensions du triangle afin de maximiser son aire?



$P = 2x + 2y = 200 \Rightarrow x = 100 - y$. Hauteur $h = \sqrt{x^2 - y^2} = 10\sqrt{100 - 2y}$ (en utilisant $x = 100 - y$).

$A(y) = \frac{1}{2}(2y)\left(10\sqrt{100 - 2y}\right) = 10y\sqrt{100 - 2y}$

$A'(y) = 10\sqrt{100 - 2y}\left[1 - \frac{y}{100 - 2y}\right] = 0 \Rightarrow y = 50$ ou $y = \frac{100}{3}$; $y = 50$ est hors du domaine (triangle dégénéré), donc le critère de la dérivée première (limite du domaine en $y = 50$) permet d'identifier un maximum local en $y = \frac{100}{3}$ cm.

$x = 100 - \frac{100}{3} = \frac{200}{3}$ cm

Les dimensions du triangle sont $\frac{200}{3}$ par $\frac{200}{3}$ par $\frac{200}{3}$ cm — le triangle équilatéral maximise l'aire.

27) Dérivez chacune des expressions suivantes par rapport à x.

a) $y = 2x + 3e^x$ $y' = 2 + 3e^x$	**b)** $y = 10^x$ $y' = 10^x \ln(10)$	**c)** $y = 4^{3x^2}$ $y' = 4^{3x^2}[\ln(4)](6x)$ $y' = 6x(4)^{3x^2}\ln(4)$
d) $y = (x^4)2^x$ $y' = 4x^3(2^x) + 2^x[\ln(2)](x^4)$ $y' = x^3 2^x[4 + x\ln(2)]$	**e)** $y = 3\sin x + \cos(2x)$ $y' = 3\cos x - 2\sin(2x)$	**f)** $y = \tan(3x)$ $y' = [\sec^2(3x)](3)$ $y' = 3\sec^2(3x)$
g) $y = [\sin(2x)]e^{3x}$ $y' = (2\cos(2x))e^{3x} + 3e^{3x}[\sin(2x)]$ $y' = e^{3x}[2\cos(2x) + 3\sin(2x)]$	**h)** $y = x^2\sin x$ $y' = 2x\sin x + x^2\cos x$ $y' = x(2\sin x + x\cos x)$	**i)** $y = 5(2)^x$ $y' = 5[\ln(2)](2)^x$
j) $y = -2(10)^{3x}$ $y' = -2[\ln(10)](10)^{3x}(3)$ $y' = -6[\ln(10)](10)^{3x}$	**k)** $y = \sin^3(x^2)$ $y' = 3[\sin(x^2)]^2[\cos(x^2)](2x)$ $y' = 6x\cos(x^2)\sin^2(x^2)$	**l)** $y = \tan\sqrt{1-x}$ $y' = \sec^2\left(\sqrt{1-x}\right)\left(\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}\right)$ $y' = \frac{-\sec^2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}$
m) $y = [\sin(2x) + 1]^4$ $y' = 4[\sin(2x) + 1]^3[\cos(2x)](2)$ $y' = 8\cos(2x)[\sin(2x) + 1]^3$	**n)** $y = \sin[\cos(x^2)]$ $y' = \cos[\cos(x^2)] \cdot [-\sin(x^2)](2x)$ $y' = -2x\sin(x^2)\cos[\cos(x^2)]$	**o)** $y = 2\sin x - 3\cos(5x)$ $y' = 2\cos x + 15\sin(5x)$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

p) $x^2y + y^2x = 1$ $2xy + x^2y' + 2xyy' + y^2 = 0$ $y' = \frac{-(y^2 + 2xy)}{2xy + x^2}$	**q)** $x = \sin(y)$ $1 = \cos(y)\, y'$ $y' = \frac{1}{\cos y}$	**r)** $y^5 + xy = 3$ $5y^4y' + y + xy' = 0$ $y' = \frac{-y}{5y^4 + x}$
s) $\sin y + \sin x = 1$ $(\cos y)y' + \cos x = 0$ $y' = \frac{-\cos x}{\cos y}$	**t)** $yx^2 + e^y = x$ $y'x^2 + 2xy + e^y y' = 1$ $y' = \frac{1 - 2xy}{e^y + x^2}$	**u)** $y = \ln(x^3 + 3x)$ $y' = \frac{3x^2 + 3}{x^3 + 3x}$
v) $y = 4\log_5 x$ $y' = \frac{4}{x \ln 5}$	**w)** $y = \log_2(\cos x)$ $y' = \frac{-\sin x}{\cos x \ln 2}$	**x)** $y = \log(4x^2)$ $y' = \frac{2}{x \ln 10}$
y) $y = x^2 e^{\sin x}$ $y' = 2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x} \cos x$ $y' = xe^{\sin x}(x \cos x + 2)$		

28) Déterminez la pente de la droite tangente à la courbe $y = \sin(\cos x)$ en $x = \frac{\pi}{2}$.

$y' = \cos(\cos x) \cdot (-\sin x)$

$y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos(0) \cdot (-1) = -1$

$m = -1$

29) Déterminez l'équation de la droite tangente à la courbe $y = 2x^2 + \sin(4x)$ en $x = \frac{\pi}{3}$.

$y' = 4x + 4\cos(4x) \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} + 4\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{4\pi}{3} - 2$

$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{\pi}{3}\right)^2 + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{2\pi^2}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2}$

$y = \frac{4\pi - 6}{3}x + \frac{12\pi - 4\pi^2 - 9\sqrt{3}}{18}$

30) La fonction du courant est $I(t) = 9\cos(120\pi t)$, où I est le courant, en ampères, et t est le temps en secondes.

a) Déterminez le courant lorsque $t = 6$ s.

$I(6) = 9\cos(720\pi) = 9\cos(0) = 9$ A (720π représente un nombre entier de révolutions)

b) La force électromotrice, $E(t)$, dans un circuit, est donnée en volts en calculant la dérivée première de la fonction de courant $I(t)$. Déterminez la fonction de la force électromotrice $E(t)$.

$E(t) = I'(t) = -1080\pi \sin(120\pi t)$

c) Déterminez la force électromotrice lorsque $t = 3$.

$E(3) = -1080\pi \sin(360\pi) = 0$ V

d) Déterminez les forces électromotrices maximale et minimale ainsi que les moments où elles se produisent.

$E(t)$ a une amplitude de $1080\pi \approx 3392.9$.

Minimum de -3392.9 V lorsque $\sin(120\pi t) = 1$, c.-à-d. $t = \frac{1 + 4k}{240}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$

Maximum de 3392.9 V lorsque $\sin(120\pi t) = -1$, c.-à-d. $t = \frac{3 + 4k}{240}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$

31) Le mouvement d'un piston de moteur peut être modélisé par $h(t) = 4\sin t$, où h est la hauteur du piston, en centimètres, au-dessus de la position neutre, et t est le temps, en secondes.

a) Déterminez la vitesse du piston lorsque $t = 5$.

$v(t) = h'(t) = 4\cos t \Rightarrow v(5) = 4\cos(5) \approx 1.135$ cm/s

b) Déterminez l'accélération du piston lorsque $t = 5$.

$a(t) = v'(t) = -4\sin t \Rightarrow a(5) = -4\sin(5) \approx 3.836$ cm/s^2

32) Un virus se propage selon la fonction $p(t) = 125(2)^{t/4}$, où $p(t)$ est le nombre de personnes infectées après t jours.

a) Combien de personnes avaient le virus au départ?

$p(0) = 125(2)^0 = 125$ personnes

b) Combien de personnes seront infectées après 4 semaines?

4 semaines $= 28$ jours : $p(28) = 125(2)^7 = 125(128) = 16\,000$ personnes

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

c) À quelle vitesse le virus se propagera-t-il après 4 semaines?

$p'(t) = \frac{125\ln(2)}{4}(2)^{t/4}$

$p'(28) = \frac{125\ln(2)}{4}(128) = 4000\ln(2) \approx 2773$ personnes/jour

d) Combien de temps faudra-t-il avant que 22 500 personnes soient infectées?

$125(2)^{t/4} = 22\,500 \Rightarrow (2)^{t/4} = 180 \Rightarrow t = \frac{4\ln(180)}{\ln(2)} \approx 30$ jours

33) Déterminez l'équation de la droite tangente à la courbe $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ en $(-3,\ 8)$.

$y' = \left(\frac{1}{2}\right)^x \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow y'(-3) = 8\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$8 = 8\ln\left(\frac{1}{2}\right)(-3) + b$

$y = 8\ln\left(\frac{1}{2}\right)x + 8 + 24\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

34) Déterminez l'équation de la tangente à la courbe $y = x\sin x$ au point où $x = \frac{\pi}{2}$.

$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$; $\quad y' = \sin x + x\cos x \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + 0 = 1$

$\frac{\pi}{2} = 1\left(\frac{\pi}{2}\right) + b \Rightarrow b = 0$

$y = x$

35) Déterminez toutes les valeurs maximales et minimales de $y = xe^x + 3e^x$.

$y = e^x(x+3) \Rightarrow y' = e^x(x+3) + e^x = e^x(x+4) = 0 \Rightarrow x = -4$

$y(-4) = e^{-4}(-4+3) = -e^{-4}$

$y' < 0$ pour $x < -4$ et $y' > 0$ pour $x > -4$, donc il s'agit du seul point critique.

Minimum local en $(-4,\ -e^{-4})$. Aucun maximum local.

36) Déterminez l'équation de la tangente à la courbe définie par $y = 2e^{3x}$ qui est parallèle à la droite définie par $-6x + y = 2$.

La droite a une pente de 6. $y' = 6e^{3x} = 6 \Rightarrow e^{3x} = 1 \Rightarrow x = 0, \quad y(0) = 2$

$2 = 6(0) + b \Rightarrow b = 2$

$y = 6x + 2$

Corrigé

1)a) $y' = 0$ **b)** $y' = 3$ **c)** $y' = 15x^2 + 3$ **d)** $y' = 3x$ **e)** $y' = \frac{-12}{x^5}$ **f)** $y' = \frac{4}{3x^{2/3}}$ **g)** $y' = 20x + 13$ **h)** $y' = 12x^2 - 26x + 5$ **i)** $y' = 24x^3 - 3x^2 - 40x + 3$ **j)** $y' = 18x - 12$ **k)** $y' = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$ **l)** $y' = \frac{-3(8x-3)}{(4x^2-3x)^4}$ **m)** $y' = 2(4x+1)(x^2+2x)^2(16x^2+23x+3)$ **n)** $y' = \frac{-10}{(x-5)^2}$ **o)** $y' = \frac{-3(x^2+4)}{(x^2+2x-4)^2}$ **p)** $y' = \frac{-3(x+2)}{(x-2)^3}$ **q)** $y' = \frac{-9(2x+4)}{(4x+x^2)^{10}}$ **r)** $y' = \frac{2}{x^{2/3}} - \frac{1}{x^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$

2) $f''(-1) = \frac{72}{625}$

3) $y = 12x - 16$

4) $x = 2$

5) $y = 5x - 7$

6)a) 750 L **b)i)** -420 L/min **ii)** -120 L/min

7) $\left(-\frac{1}{3},\ 1.185\right)$ et $(1,\ 0)$

8) 2.34 ppm/année

9)a) -17 m/s **b)** -2 m/s²

10)a) $p(x) = -\frac{1}{4}x + 162.5$ **b)** $R(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 162.5x$ **c)** $R(250) = \$25\,000,\ R(290) = \$26\,100$ **d)** \$17.50 par paire vendue

11)a) $p(x) = 24 - 2x$ **b)** $R(x) = (24 - 2x)(400 + 50x)$ **c)** $R'(x) = 400 - 200x$ **d)** lorsque le prix est de 20 \$, le revenu est de 10 000 \$; les propriétaires peuvent utiliser cette information pour choisir le meilleur prix à demander pour les billets **e)** 22 \$

12)a) $R(500) = \$8750$ et $R'(500) = \$5$ /article **b)** $C(500) = \$1005$ et $C'(500) = \$2$ /article **c)** $P(500) = \$7745$ et $P'(500) = \$3$ /article

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

13) $y = 4x + 8$ et $y = 4x - 8$

14) (voir les solutions — esquisse de f, f', f'')

15) Croissante : $x > 1$; Décroissante : $x < -2, \quad -2 < x < 1$

16) concave vers le haut : $-3 < x < 0, \quad x > 3$; concave vers le bas : $x < -3, \quad 0 < x < 3$

17) minimum absolu : $(0, 1)$; maximum absolu : $(2, 21)$

18) minimum local $(0, 2)$; maximum local $(1, 4)$; point d'inflexion $(0.5, 3)$; concave vers le haut $x < 0.5$; concave vers le bas $x > 0.5$

19)a) maximum local : $(0, 81)$ **b)** minimum local : $(-2, 17)$ et $(1, -10)$; maximum local : $(-1, 22)$ **c)** minimum local : $(0, -8)$; maximum local : $(2, 4)$

20)a) croissante : $x < -2, \quad x > 2$; décroissante : $-2 < x < 2$ **b)** croissante : $-1 < x < 0$ et $x > 1.5$; décroissante : $x < -1$ et $0 < x < 1.5$

21)a) points d'inflexion : $\left(-2, -\frac{80}{3}\right)$ et $\left(2, -\frac{80}{3}\right)$; concave vers le bas $-2 < x < 2$; concave vers le haut $x < -2, \quad x > 2$ **b)** points d'inflexion : $(0, -5)$ et $(4, -249)$; concave vers le bas $0 < x < 4$; concave vers le haut $x < 0, \quad x > 4$

22) (voir les solutions pour les six esquisses)

23) 13.4 cm $\times$ 13.4 cm $\times$ 26.7 cm

24)a) $r = 4.3$ cm et $h = 8.6$ cm **b)** $r = 3.4$ cm et $h = 13.8$ cm

25) 3 clôtures parallèles de 133.3 m par 2 clôtures parallèles de 100 m

26) Tous les côtés mesurent $\frac{200}{3}$ cm

27)a) $y' = 2 + 3e^x$ **b)** $y' = 10^x \ln 10$ **c)** $y' = 6x(4)^{3x^2} \ln(4)$ **d)** $y' = x^3 2^x [4 + x \ln(2)]$ **e)** $y' = 3\cos x - 2\sin(2x)$ **f)** $y' = 3\sec^2(3x)$ **g)** $y' = e^{3x}[3\sin(2x) + 2\cos(2x)]$ **h)** $y' = x(2\sin x + x\cos x)$ **i)** $y' = 5(\ln 2)(2)^x$ **j)** $y' = -6[\ln(10)](10)^{3x}$ **k)** $y' = 6x\cos(x^2)\sin^2(x^2)$ **l)** $y' = \frac{-\sec^2\sqrt{1-x}}{2\sqrt{1-x}}$ **m)** $y' = 8\cos(2x)[\sin(2x) + 1]^3$ **n)** $y' = -2x\sin(x^2)\cos[\cos(x^2)]$ **o)** $y' = 2\cos x + 15\sin(5x)$ **p)** $y' = \frac{-(y^2 + 2xy)}{2xy + x^2}$ **q)** $y' = \frac{1}{\cos y}$ **r)** $y' = \frac{-y}{5y^4 + x}$ **s)** $y' = \frac{-\cos x}{\cos y}$ **t)** $y' = \frac{1 - 2xy}{e^y + x^2}$ **u)** $y' = \frac{3x^2 + 3}{x^3 + 3x}$ **v)** $y' = \frac{4}{x \ln 5}$ **w)** $y' = \frac{-\sin x}{\cos x \ln 2}$ **x)** $y' = \frac{2}{x \ln 10}$ **y)** $y' = xe^{\sin x}(x\cos x + 2)$

28) $m = -1$

29) $y = \frac{4\pi - 6}{3}x + \frac{12\pi - 4\pi^2 - 9\sqrt{3}}{18}$

30)a) 9 A **b)** $E(t) = -1080\pi\sin(120\pi t)$ **c)** 0 V **d)** le minimum est -3392.9 V lorsque $t = \frac{1 + 4k}{240}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$; le maximum est 3392.9 V lorsque $t = \frac{3 + 4k}{240}$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$

31)a) 1.135 cm/s **b)** 3.836 cm/s^2

32)a) 125 personnes **b)** 16 000 personnes **c)** 2773 personnes/jour **d)** environ 30 jours

33) $y = 8\ln\left(\frac{1}{2}\right)x + 8 + 24\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

34) $y = x$

35) Minimum local en $(-4, -e^{-4})$. Aucun maximum local.

36) $y = 6x + 2$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.