2.4 Leçon sur la résolution d'équations polynomiales avec solutions

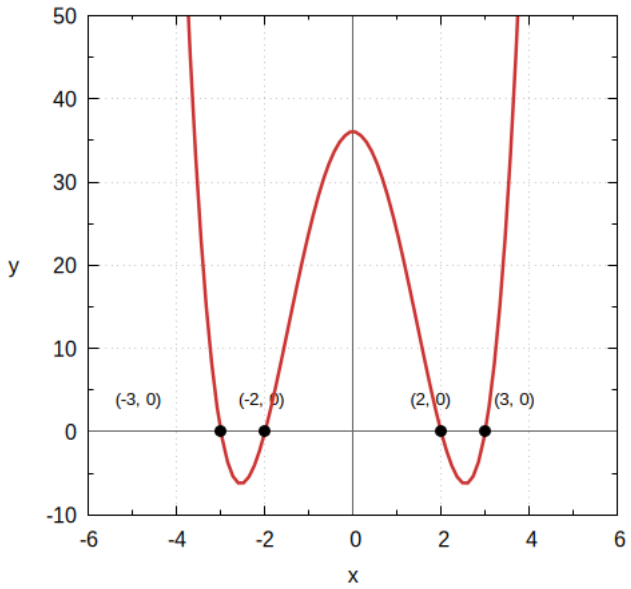
Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Dans cette section, vous apprendrez des méthodes pour résoudre des équations polynomiales de degré supérieur à deux par factorisation (à l'aide du théorème du facteur). Vous identifierez également le lien entre les racines des équations polynomiales, les abscisses à l'origine du graphique d'une fonction polynomiale, et les zéros de la fonction.

Partie 1 : Investigation

a) Utilisez la technologie pour tracer le graphique de la fonction $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$



b) Déterminez les abscisses à l'origine à partir du graphique

Les abscisses à l'origine sont :

$(-3, 0)$, $(-2, 0)$, $(2, 0)$, et $(3, 0)$

c) Factorisez $f(x)$. Ensuite, utilisez les facteurs pour déterminer les zéros (racines) de $f(x)$.

$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$—peut être factorisé comme un trinôme carré

$$0 = (x^2)^2 - 13(x^2) + 36$$

Le terme constant se factorise en -9 et -4 (produit 36, somme -13) :

$$0 = (x^2 - 9)(x^2 - 4)$$

Les deux sont des différences de carrés :

$$0 = (x - 3)(x + 3)(x - 2)(x + 2)$$

$x - 3 = 0 \rightarrow x_1 = 3$

$x + 3 = 0 \rightarrow x_2 = -3$

$x - 2 = 0 \rightarrow x_3 = 2$

$x + 2 = 0 \rightarrow x_4 = -2$

Rappel : Les zéros de la fonction sont les valeurs de x qui font $f(x) = 0$. Si l'équation polynomiale est factorisable, alors les valeurs des zéros (racines) peuvent être déterminées algébriquement en résolvant chaque facteur linéaire ou quadratique.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

d) Comment les abscisses à l'origine du graphique sont-elles liées aux racines (zéros) de l'équation ?

Les zéros de l'équation SONT les abscisses à l'origine du graphique de la fonction.

Exemple 1 : Indiquez les solutions des polynômes suivants qui sont déjà sous forme factorisée

a) $x(2x+3)(x-5)=0$

$x_1=0$

$2x+3=0 \rightarrow x_2=-\frac{3}{2}$

$x-5=0 \rightarrow x_3=5$

Solution(s) : $(0,\ 0)$, $\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$, et $(5,\ 0)$

b) $(2x^2-3)(3x^2+1)=0$

$2x^2-3=0$

$x^2=\frac{3}{2}$

$x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

$x_1=\sqrt{\frac{3}{2}},\ x_2=-\sqrt{\frac{3}{2}}$

$3x^2+1=0$

$x^2=-\frac{1}{3}$

$x=\pm\sqrt{-\frac{1}{3}}$—pas une solution réelle

Solution(s) : $\left(\sqrt{\frac{3}{2}},\ 0\right)$ et $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}},\ 0\right)$

Exemple 2 : Résolvez chaque équation polynomiale par factorisation

a) $x^3-x^2-2x=0$

$x(x^2-x-2)=0$—facteur commun

Produit -2, somme $-1 \rightarrow -2$ et 1

$x(x-2)(x+1)=0$

$x_1=0$

$x-2=0 \rightarrow x_2=2$

$x+1=0 \rightarrow x_3=-1$

Solution(s) : $(0,\ 0)$, $(2,\ 0)$, et $(-1,\ 0)$

b) $3x^3+x^2-12x-4=0$

$x^2(3x+1)-4(3x+1)=0$

$(3x+1)(x^2-4)=0$

$(3x+1)(x-2)(x+2)=0$

$x_1=-\frac{1}{3},\ x_2=2,\ x_3=-2$

Solution(s) : $\left(-\frac{1}{3},\ 0\right)$, $(2,\ 0)$, et $(-2,\ 0)$

Méthodes de factorisation :

- Division longue et division synthétique
- Factorisation par groupement
- Différence de carrés : $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$
- Mise en évidence simple
- Factorisation de trinômes (somme et produit)
- Somme et différence de cubes : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 3 :

a) Utilisez le théorème du facteur pour résoudre $0 = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$

Les valeurs possibles de b sont : $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$

Les valeurs possibles pour a sont : $\pm 1,\ \pm 2$

Les valeurs possibles pour $\frac{b}{a} = \pm 1,\ \pm \frac{1}{2},\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm \frac{3}{2},\ \pm 6$

$f(2) = 2(2)^3 + 3(2)^2 - 11(2) - 6 = 0,\ \therefore x - 2$ est un facteur

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 3 & -11 & -6 \\ & & 4 & 14 & 6 \\ \hline & 2 & 7 & 3 & 0 \\ & x^2 & x & \# & R \end{array}$$

$f(x) = (x - 2)(2x^2 + 7x + 3)$

$0 = (x - 2)[(2x^2 + 6x) + (1x + 3)]$

$0 = (x - 2)[2x(x + 3) + 1(x + 3)]$

$0 = (x - 2)(x + 3)(2x + 1)$

$x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = 2$

$x + 3 = 0 \rightarrow x_2 = -3$

$2x + 1 = 0 \rightarrow x_3 = -\frac{1}{2}$

Solution(s) : $(2,\ 0),\ (-3,\ 0)$, et $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$

b) Que représentent vos réponses en a) ?

Les valeurs 2, $-\frac{1}{2}$, et -3 sont les racines de l'équation $2x^3 + 3x^2 - 11x - 6 = 0$, ce qui signifie qu'elles sont les abscisses à l'origine du graphique de la fonction $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$.

Exemple 4 : Trouvez les zéros de la fonction polynomiale $f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$

Les valeurs possibles pour b sont $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 4,\ \pm 6$

$f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^3 - 7(-1)^2 + 8(-1) + 12 = 0,\ \therefore x + 1$ est un facteur

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -2 & -7 & 8 & 12 \\ & & -1 & 3 & 4 & -12 \\ \hline & 1 & -3 & -4 & 12 & 0 \\ & x^3 & x^2 & x & \# & R \end{array}$$

$f(x) = (x + 1)(x^3 - 3x^2 - 4x + 12)$

$= (x + 1)[x^2(x - 3) - 4(x - 3)]$

$= (x + 1)(x - 3)(x^2 - 4)$

$= (x + 1)(x - 3)(x - 2)(x + 2)$

$x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = -1$

$x - 3 = 0 \rightarrow x_2 = 3$

$x - 2 = 0 \rightarrow x_3 = 2$

$x + 2 = 0 \rightarrow x_4 = -2$

Solution(s) : $(-1,\ 0),\ (3,\ 0),\ (2,\ 0)$, et $(-2,\ 0)$

Exemple 5 :

a) Trouvez les racines de la fonction polynomiale $f(x) = x^3 + x - 3x^2 - 3$

Commencez par réarranger en ordre décroissant de degré : $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$

$0 = (x^3 - 3x^2) + (x - 3)$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

$0 = x^2(x-3) + 1(x-3)$

$0 = (x-3)(x^2+1)$

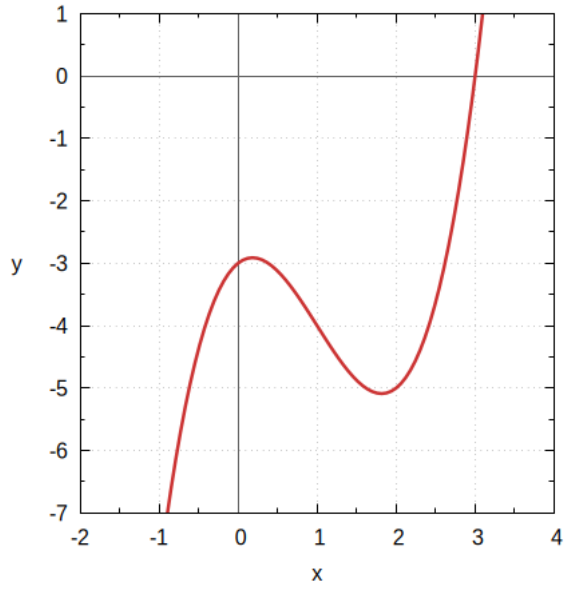
$x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow x = \pm\sqrt{-1}$—pas une racine réelle

Solution(s) : $(3,\ 0)$

Remarque : Puisque la racine carrée d'un nombre négatif n'est pas un nombre réel, la seule racine RÉELLE est $x = 3$. $x = \pm\sqrt{-1}$ est considérée comme une racine NON RÉELLE.

b) Utilisez la technologie pour observer le graphique de la fonction $f(x)$. Commentez la façon dont les abscisses à l'origine du graphique sont liées aux racines RÉELLES et NON RÉELLES de l'équation.



Les abscisses à l'origine du graphique d'une fonction polynomiale correspondent uniquement aux racines RÉELLES de l'équation polynomiale associée. Il n'y a pas d'abscisses à l'origine sur le graphique qui correspondent aux racines NON RÉELLES de l'équation.

Exemple 6 : Trouvez toutes les solutions réelles de chaque équation polynomiale

a) $0 = 2x^3 - 3x^2 - x - 2$

Les valeurs possibles de b sont : $\pm 1,\ \pm 2$

Les valeurs possibles pour a sont : $\pm 1,\ \pm 2$

Les valeurs possibles pour $\frac{b}{a} = \pm 1,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm 2$

$f(2) = 2(2)^3 - 3(2)^2 - (2) - 2 = 0,\ \therefore x - 2$ est un facteur de $f(x)$

$$\begin{array}{c|cccc} 2 & 2 & -3 & -1 & -2 \\ & & 4 & 2 & 2 \\ \hline & 2 & 1 & 1 & 0 \\ & x^2 & x & \# & R \end{array}$$

$f(x) = (x-2)(2x^2 + x + 1)$

$0 = (x-2)(2x^2 + x + 1)$

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

Vérifiez le discriminant de $2x^2 + x + 1$ pour voir s'il y a d'autres racines réelles :

$b^2 - 4ac = (1)^2 - 4(2)(1) = -7$—donc pas de racines réelles

Solution(s) : $(2,\ 0)$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

b) $0 = 8x^3 + 125$

Indice : Il s'agit d'une somme de cubes $\rightarrow a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$g(x) = (2x)^3 + (5)^3$

$0 = (2x + 5)(4x^2 - 10x + 25)$

$2x + 5 = 0 \rightarrow x = -\frac{5}{2}$

Vérifiez le discriminant de $4x^2 - 10x + 25$ pour voir s'il y a d'autres racines réelles :

$b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4(4)(25) = -300$—pas de racines réelles

Solution(s) : $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.