2.3 Leçon sur le théorème du facteur avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Dans cette section, vous apprendrez à déterminer les facteurs d'une fonction polynomiale de degré 3 ou plus.

Partie 1 : Retour sur le théorème du reste

a) Utilisez le théorème du reste pour déterminer le reste lorsque $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ est divisé par $x + 2$

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 + 4(-2)^2 + (-2) - 6 \\ &= -8 + 16 - 2 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le reste de la division par $x + 2$ est 0. Cela signifie que $x + 2$ est un facteur du dividende.

> **Théorème du reste :** Lorsqu'une fonction polynomiale $P(x)$ est divisée par $x - b$, le reste est $P(b)$; et lorsqu'elle est divisée par $ax - b$, le reste est $P\left(\frac{b}{a}\right)$, où a et b sont des entiers, et $a \neq 0$.

b) Vérifiez votre réponse en a) en effectuant la division à l'aide de la division longue ou de la division synthétique.

Remarque : j'ai choisi la division synthétique puisqu'il s'agit d'un diviseur linéaire de la forme $x - b$.

$$\begin{array}{r|cccc} -2 & 1 & 4 & 1 & -6 \\ & & -2 & -4 & 6 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & 0 \\ & x^2 & x & \# & R \end{array}$$

$x^3 + 4x^2 + x - 6 = (x + 2)(x^2 + 2x - 3)$

> **Théorème du facteur :** $x - b$ est un facteur d'un polynôme $P(x)$ si et seulement si $P(b) = 0$. De même, $ax - b$ est un facteur de $P(x)$ si et seulement si $P\left(\frac{b}{a}\right) = 0$.

Exemple 1 : Déterminez si $x - 3$ et $x + 2$ sont des facteurs de $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$

$$\begin{aligned} P(3) &= (3)^3 - (3)^2 - 14(3) + 24 \\ &= 27 - 9 - 42 + 24 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque le reste est 0, $x - 3$ divise $P(x)$ exactement ; cela signifie que $x - 3$ est un facteur de $P(x)$.

$$\begin{aligned} P(-2) &= (-2)^3 - (-2)^2 - 14(-2) + 24 \\ &= -8 - 4 + 28 + 24 \\ &= 40 \end{aligned}$$

Puisque le reste n'est pas 0, $x + 2$ ne divise pas $P(x)$ exactement ; cela signifie que $x + 2$ n'est pas un facteur de $P(x)$.

Partie 2 : Comment déterminer un facteur d'un polynôme dont le coefficient dominant est 1

Vous pourriez deviner et vérifier des valeurs de b qui font $P(b) = 0$ jusqu'à en trouver une qui fonctionne…

Ou vous pouvez utiliser le théorème du zéro entier pour vous aider.

> **Théorème du zéro entier :** Si $x - b$ est un facteur d'une fonction polynomiale $P(x)$ dont le coefficient dominant est 1 et dont les autres coefficients sont des entiers, alors b est un facteur du terme constant de $P(x)$.

Remarque : Une fois qu'un des facteurs d'un polynôme est trouvé, la division est utilisée pour déterminer les autres facteurs.

Exemple 2 : Factorisez complètement $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Soit $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

Trouvez une valeur de b telle que $P(b) = 0$. D'après le théorème du facteur, si $P(b) = 0$, alors on sait que $x - b$ est un facteur. On peut ensuite diviser $P(x)$ par ce facteur.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Le théorème du zéro entier nous indique de tester les facteurs de -6.

Testez $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,$ et ± 6. Une fois qu'un facteur est trouvé, vous pouvez arrêter de tester et utiliser ce facteur pour diviser $P(x)$.

$$\begin{aligned} P(1) &= (1)^3 + 2(1)^2 - 5(1) - 6 \\ &= 1 + 2 - 5 - 6 \\ &= -8 \end{aligned}$$

Puisque $P(1) \neq 0$, on sait que $x - 1$ n'est PAS un facteur de $P(x)$.

$$\begin{aligned} P(2) &= (2)^3 + 2(2)^2 - 5(2) - 6 \\ &= 8 + 8 - 10 - 6 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque $P(2) = 0$, on sait que $x - 2$ est un facteur de $P(x)$.

Vous pouvez maintenant utiliser soit la division longue soit la division synthétique pour trouver les autres facteurs.

Méthode 1 : Division longue

$$\begin{array}{r} x^2 +4x +3 \\ \hline x-2\ )\ x^3 +2x^2 -5x -6 \\ \underline{x^3 -2x^2} \\ 4x^2 -5x \\ \underline{4x^2 -8x} \\ 3x -6 \\ \underline{3x -6} \\ R = 0 \end{array}$$

Méthode 2 : Division synthétique

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 1 & 2 & -5 & -6 \\ & & 2 & 8 & 6 \\ \hline & 1 & 4 & 3 & 0 \\ & x^2 & x & \# & R \end{array}$$

$x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)(x^2 + 4x + 3)$

$= (x - 2)(x + 3)(x + 1)$

Exemple 3 : Factorisez complètement $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$.

Soit $P(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$

Trouvez une valeur de b telle que $P(b) = 0$. D'après le théorème du facteur, si $P(b) = 0$, alors on sait que $x - b$ est un facteur. On peut ensuite diviser $P(x)$ par ce facteur.

Le théorème du zéro entier nous indique de tester les facteurs de -18.

Testez $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6,\ \pm 9,$ et ± 18. Une fois qu'un facteur est trouvé, vous pouvez arrêter de tester et utiliser ce facteur pour diviser $P(x)$.

$$\begin{aligned} P(1) &= (1)^4 + 3(1)^3 - 7(1)^2 - 27(1) - 18 \\ &= -48 \end{aligned}$$

$x - 1$ N'EST PAS un facteur de $P(x)$.

$$\begin{aligned} P(-1) &= (-1)^4 + 3(-1)^3 - 7(-1)^2 - 27(-1) - 18 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$x + 1$ EST un facteur de $P(x)$.

Puisque $P(-1) = 0$, cela nous indique que $x + 1$ est un facteur. Utilisez la division pour déterminer l'autre facteur.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -1 & 1 & 3 & -7 & -27 & -18 \\ & & -1 & -2 & 9 & 18 \\ \hline & 1 & 2 & -9 & -18 & 0 \\ & x^3 & x^2 & x & \# & R \end{array}$$

$x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18 = (x + 1)(x^3 + 2x^2 - 9x - 18)$

On peut maintenant diviser davantage $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ en utilisant à nouveau la division ou en factorisant par groupement.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Méthode 1 : Division

Testez les facteurs de -18

$$\begin{aligned} f(-2) &= (-2)^3 + 2(-2)^2 - 9(-2) - 18 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$x+2$ est un facteur

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & 2 & -9 & -18 \\ & & -2 & 0 & 18 \\ \hline & 1 & 0 & -9 & 0 \\ & x^2 & x & \# & R \end{array}$$

$x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18 = (x+1)(x+2)(x^2-9)$

$= (x+1)(x+2)(x-3)(x+3)$

Méthode 2 : Factorisation par groupement

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

Groupez les 2 premiers termes et les 2 derniers termes, et séparez-les par un signe d'addition.

$f(x) = (x^3 + 2x^2) + (-9x - 18)$

Mettez en évidence le facteur commun de chaque groupe

$f(x) = x^2(x+2) - 9(x+2)$

Mettez en évidence le binôme commun

$f(x) = (x+2)(x^2-9)$

Par conséquent,

$x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18 = (x+1)(x^3 + 2x^2 - 9x - 18)$

$= (x+1)(x+2)(x^2-9)$

$= (x+1)(x+2)(x-3)(x+3)$

Exemple 4 : Essayez à nouveau la factorisation par groupement

$x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 12x$

Remarque : La factorisation par groupement ne fonctionne pas toujours… mais quand elle fonctionne, elle vous fait gagner du temps !

$= (x^4 - 6x^3) + (2x^2 - 12x)$

$= x^3(x-6) + 2x(x-6)$

$= (x-6)(x^3 + 2x)$

$= (x-6)(x)(x^2+2)$

Partie 3 : Comment déterminer un facteur d'un polynôme dont le coefficient dominant n'est PAS 1

Le théorème du zéro entier peut être étendu pour inclure les polynômes dont le coefficient dominant n'est pas 1. Cette extension est connue sous le nom de théorème du zéro rationnel.

> **Théorème du zéro rationnel :** Supposons que $P(x)$ est une fonction polynomiale à coefficients entiers et que $x = \frac{b}{a}$ est un zéro de $P(x)$, où a et b sont des entiers et $a \neq 0$. Alors,
>
> - b est un facteur du terme constant de $P(x)$
> - a est un facteur du coefficient dominant de $P(x)$
> - $(ax - b)$ est un facteur de $P(x)$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Exemple 5 : Factorisez $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$

On doit commencer par trouver une valeur de $\frac{b}{a}$ où $P\left(\frac{b}{a}\right) = 0$.

b doit être un facteur du terme constant. Les valeurs possibles pour b sont : $\pm 1,\ \pm 2$

a doit être un facteur du coefficient dominant. Les valeurs possibles de a sont : $\pm 1,\ \pm 3$

Par conséquent, les valeurs possibles pour $\frac{b}{a}$ sont : $\pm 1,\ \pm \frac{1}{3},\ \pm 2,\ \pm \frac{2}{3}$

Testez des valeurs de $\frac{b}{a}$ pour x dans $P(x)$ afin de trouver un zéro.

$P(1) = 3(1)^3 + 2(1)^2 - 7(1) + 2 = 0$

Puisque $P(1) = 0$, $x - 1$ est un facteur de $P(x)$. Utilisez la division pour trouver les autres facteurs.

$$\begin{array}{r|rrr} 1 & 3 & 2 & -7 & 2 \\ & & 3 & 5 & -2 \\ \hline & 3 & 5 & -2 & 0 \\ & x^2 & x & \# & R \end{array}$$

$3x^3 + 2x^2 - 7x + 2 = (x - 1)(3x^2 + 5x - 2)$

$= (x - 1)[(3x^2 + 6x) + (-1x - 2)]$

$= (x - 1)[3x(x + 2) - 1(x + 2)]$

$= (x - 1)(x + 2)(3x - 1)$

Exemple 6 : Factorisez $P(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$

Les valeurs possibles pour b sont : $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm 6$

Les valeurs possibles de a sont : $\pm 1,\ \pm 2$

Par conséquent, les valeurs possibles pour $\frac{b}{a}$ sont : $\pm 1,\ \pm \frac{1}{2},\ \pm 2,\ \pm 3,\ \pm \frac{3}{2},\ \pm 6$

$f(-1) = 2(-1)^3 + (-1)^2 - 7(-1) - 6 = 0$

Par conséquent, $x + 1$ est un facteur de $P(x)$

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 1 & -7 & -6 \\ & & -2 & 1 & 6 \\ \hline & 2 & -1 & -6 & 0 \\ & x^2 & x & \# & R \end{array}$$

$2x^3 + x^2 - 7x - 6 = (x + 1)(2x^2 - x - 6)$

$= (x + 1)[(2x^2 - 4x) + (3x - 6)]$

$= (x + 1)[2x(x - 2) + 3(x - 2)]$

$= (x + 1)(x - 2)(2x + 3)$

Partie 4 : Question d'application

Exemple 7 : Lorsque $f(x) = 2x^3 - mx^2 + nx - 2$ est divisé par $x + 1$, le reste est -12 et $x - 2$ est un facteur. Déterminez les valeurs de m et n.

Indice : Utilisez les renseignements donnés pour créer 2 équations, puis utilisez la substitution ou l'élimination pour résoudre.

$$\begin{aligned} f(-1) &= 2(-1)^3 - m(-1)^2 + n(-1) - 2 \\ -12 &= -2 - m - n - 2 \\ -8 &= -m - n \end{aligned}$$

Équation (1) : $-8 = -m - n$

$$\begin{aligned} f(2) &= 2(2)^3 - m(2)^2 + n(2) - 2 \\ 0 &= 16 - 4m + 2n - 2 \\ -14 &= -4m + 2n \end{aligned}$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

Équation (2) : $-14 = -4m + 2n$

Multipliez l'équation (1) par 2 : $-16 = -2m - 2n$

Additionnez ceci à l'équation (2) : $-14 = -4m + 2n$

$$-30 = -6m$$
$$5 = m$$

Substituez $m = 5$ dans l'équation (1) ou (2) :

$$-8 = -5 - n$$
$$n = 3$$

Donc $m = 5$ et $n = 3$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.