# 2.3 Leçon sur le théorème du facteur

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Dans cette section, vous apprendrez à déterminer les facteurs d'une fonction polynomiale de degré 3 ou plus.

## Partie 1 : Retour sur le théorème du reste

**a)** Utilisez le théorème du reste pour déterminer le reste lorsque $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ est divisé par $x + 2$

> **Théorème du reste :** Lorsqu'une fonction polynomiale $P(x)$ est divisée par $x - b$, le reste est $P(b)$ ; et lorsqu'elle est divisée par $ax - b$, le reste est $P\left(\frac{b}{a}\right)$, où $a$ et $b$ sont des entiers, et $a \neq 0$.

**b)** Vérifiez votre réponse en a) en effectuant la division à l'aide de la division longue ou de la division synthétique.

Remarque : j'ai choisi la division synthétique puisqu'il s'agit d'un diviseur linéaire de la forme $x - b$.

> **Théorème du facteur :** $x - b$ est un facteur d'un polynôme $P(x)$ si et seulement si $P(b) = 0$. De même, $ax - b$ est un facteur de $P(x)$ si et seulement si $P\left(\frac{b}{a}\right) = 0$.

**Exemple 1 :** Déterminez si $x - 3$ et $x + 2$ sont des facteurs de $P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$

$P(3) =$

Puisque le reste est ____, $x - 3$ divise $P(x)$ exactement ; cela signifie que $x - 3$ _____ de $P(x)$.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés. 

$P(-2) =$

Puisque le reste n'est pas _____, $x+2$ ne divise pas $P(x)$ exactement ; cela signifie que $x+2$ _____ de $P(x)$.

## Partie 2 : Comment déterminer un facteur d'un polynôme dont le coefficient dominant est 1

Vous pourriez deviner et vérifier des valeurs de $b$ qui font $P(b) = 0$ jusqu'à en trouver une qui fonctionne…

Ou vous pouvez utiliser le théorème du zéro entier pour vous aider.

> **Théorème du zéro entier :** Si $x - b$ est un facteur d'une fonction polynomiale $P(x)$ dont le coefficient dominant est 1 et dont les autres coefficients sont des entiers, alors $b$ est un facteur du terme constant de $P(x)$.

Remarque : Une fois qu'un des facteurs d'un polynôme est trouvé, la division est utilisée pour déterminer les autres facteurs.

**Exemple 2 :** Factorisez complètement $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Soit $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

Trouvez une valeur de $b$ telle que $P(b) = 0$. D'après le théorème du facteur, si $P(b) = 0$, alors on sait que $x - b$ est un facteur. On peut ensuite diviser $P(x)$ par ce facteur.

Le théorème du zéro entier nous indique de tester les facteurs de _____.

Testez _____. Une fois qu'un facteur est trouvé, vous pouvez arrêter de tester et utiliser ce facteur pour diviser $P(x)$.

$P(1) =$

Puisque _____, on sait que _____ un facteur de $P(x)$.

$P(2) =$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés. 

Puisque _____, on sait que _____ un facteur de $P(x)$.

Vous pouvez maintenant utiliser soit la division longue soit la division synthétique pour trouver les autres facteurs

Méthode 1 : Division longue

Méthode 2 : Division synthétique

**Exemple 3 :** Factorisez complètement $x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$.

Soit $P(x) = x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18$

Trouvez une valeur de $b$ telle que $P(b) = 0$. D'après le théorème du facteur, si $P(b) = 0$, alors on sait que $x - b$ est un facteur. On peut ensuite diviser $P(x)$ par ce facteur.

Le théorème du zéro entier nous indique de tester les facteurs de _____.

Testez _____. Une fois qu'un facteur est trouvé, vous pouvez arrêter de tester et utiliser ce facteur pour diviser $P(x)$.

Puisque _____, cela nous indique que _____ est un facteur. Utilisez la division pour déterminer l'autre facteur.

On peut maintenant diviser davantage $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ en utilisant à nouveau la division ou en factorisant par groupement.

Méthode 1 : Division

**Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.** 

Méthode 2 : Factorisation par groupement

$f(x) = x^3 + 2x^2 - 9x - 18$

Groupez les 2 premiers termes et les 2 derniers termes, et séparez-les par un signe d'addition.

Mettez en évidence le facteur commun de chaque groupe

Mettez en évidence le binôme commun

Par conséquent,

$x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 27x - 18 =$

**Exemple 4 :** Essayez à nouveau la factorisation par groupement

$x^4 - 6x^3 + 2x^2 - 12x$

Remarque : La factorisation par groupement ne fonctionne pas toujours… mais quand elle fonctionne, elle vous fait gagner du temps !

## Partie 3 : Comment déterminer un facteur d'un polynôme dont le coefficient dominant n'est PAS 1

Le théorème du zéro entier peut être étendu pour inclure les polynômes dont le coefficient dominant n'est pas 1.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés. 

Cette extension est connue sous le nom de théorème du zéro rationnel.

> **Théorème du zéro rationnel :** Supposons que $P(x)$ est une fonction polynomiale à coefficients entiers et que $x = \frac{b}{a}$ est un zéro de $P(x)$, où $a$ et $b$ sont des entiers et $a \neq 0$. Alors,
>
> - $b$ est un facteur du terme constant de $P(x)$
> - $a$ est un facteur du coefficient dominant de $P(x)$
> - $(ax - b)$ est un facteur de $P(x)$

**Exemple 5 :** Factorisez $P(x) = 3x^3 + 2x^2 - 7x + 2$

On doit commencer par trouver une valeur de $\frac{b}{a}$ où $P\left(\frac{b}{a}\right) = 0$.

$b$ doit être un facteur du terme constant. Les valeurs possibles pour $b$ sont : _____

$a$ doit être un facteur du coefficient dominant. Les valeurs possibles de $a$ sont : _____

Par conséquent, les valeurs possibles pour $\frac{b}{a}$ sont : _____

Testez des valeurs de $\frac{b}{a}$ pour $x$ dans $P(x)$ afin de trouver un zéro.

Puisque _____ de $P(x)$. Utilisez la division pour trouver les autres facteurs.

**Exemple 6 :** Factorisez $P(x) = 2x^3 + x^2 - 7x - 6$

## Partie 4 : Question d'application

**Exemple 7 :** Lorsque $f(x) = 2x^3 - mx^2 + nx - 2$ est divisé par $x + 1$, le reste est $-12$ et $x - 2$ est un facteur. Déterminez les valeurs de $m$ et $n$.

Indice : Utilisez les renseignements donnés pour créer 2 équations, puis utilisez la substitution ou l'élimination pour résoudre.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés. 

Droits d’auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés. 