2.1 Leçon sur la division longue de polynômes et le théorème du reste avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Dans cette section, vous appliquerez la méthode de la division longue pour diviser un polynôme par un binôme. Vous apprendrez également à utiliser le théorème du reste pour déterminer le reste d'une division sans effectuer la division.

Partie 1 : Vous souvenez-vous de la division longue (diviser, multiplier, soustraire, répéter) ?

La division longue peut être utilisée pour calculer $107 \div 4$ de la façon suivante :

- 4 n'entre pas dans 1, alors on commence par déterminer combien de fois 4 entre dans 10. Il y entre 2 fois. On place donc un 2 au quotient au-dessus du 10. C'est l'étape de division.
- Ensuite, on multiplie le 2 par 4 (le diviseur) et on place le produit sous le 10 dans le dividende. C'est l'étape de multiplication.
- On soustrait maintenant 8 du 10 dans le dividende. On abaisse ensuite le chiffre suivant du dividende et on le place à côté de la différence calculée. C'est l'étape de soustraction.
- On répète ensuite ces étapes jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de chiffres à abaisser dans le dividende.

$$\begin{array}{r} 26 \\ 4\overline{)\,107} \\ \underline{8} \\ 27 \\ \underline{24} \\ 3 \end{array}$$

Tout énoncé de division impliquant des nombres peut être réécrit à l'aide de la multiplication et de l'addition. On peut exprimer les résultats de notre exemple de deux façons différentes :

Cela nous donne $107 = (4)(26) + 3$

OU, de façon équivalente, $\frac{107}{4} = 26 + \frac{3}{4} = 26.75$

Exemple 1 : Utilisez la division longue pour calculer $753 \div 22$

$$\begin{array}{r} 34 \\ 22\overline{)\,753} \\ \underline{66} \\ 93 \\ \underline{88} \\ 5 \end{array}$$

Cela nous donne $753 = (22)(34) + 5$

OU, de façon équivalente, $\frac{753}{22} = 34 + \frac{5}{22} = 34.227$

Partie 2 : Utiliser la division longue pour diviser un polynôme par un binôme

Le quotient de $(3x^3 - 5x^2 - 7x - 1) \div (x - 3)$ peut également être trouvé à l'aide de la division longue…

- Concentrez-vous uniquement sur les premiers termes du dividende et du diviseur. Trouvez le quotient de ces termes.
- Puisque $3x^3 \div x = 3x^2$, cela devient le premier terme du quotient. Placez $3x^2$ au-dessus du terme du dividende de même degré.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

- Multipliez $3x^2$ par le diviseur, et écrivez la réponse sous le dividende. Assurez-vous d'aligner les « termes semblables ». $3x^2(x-3) = 3x^3 - 9x^2$. Soustrayez ce produit du dividende puis abaissez le terme suivant du dividende.
- Maintenant, encore une fois, trouvez le quotient des premiers termes du diviseur et de la nouvelle expression obtenue dans le dividende. Puisque $4x^2 \div x = 4x$, cela devient le terme suivant du quotient.
- Multipliez $4x$ par le diviseur, et écrivez la réponse sous la dernière ligne du dividende. Assurez-vous d'aligner les « termes semblables ». $4x(x-3) = 4x^2 - 12x$. Soustrayez ce produit du dividende puis abaissez le terme suivant.
- Maintenant, trouvez le quotient des premiers termes du diviseur et de la nouvelle expression du dividende. Puisque $5x \div x = 5$, cela devient le terme suivant du quotient. Multipliez $5(x-3) = 5x - 15$. Soustrayez ce produit du dividende.
- Le processus s'arrête lorsque le degré du reste est inférieur au degré du diviseur. Le diviseur est de degré 1 et le reste est maintenant de degré 0, alors on s'arrête.

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 3x^2 & +4x & +5 \\
\hline
x-3\ ) & 3x^3 & -5x^2 & -7x & -1 \\
 & \underline{3x^3} & \underline{-9x^2} & & \\
 & & 4x^2 & -7x & \\
 & & \underline{4x^2} & \underline{-12x} & \\
 & & & 5x & -1 \\
 & & & \underline{5x} & \underline{-15} \\
 & & & R = 14 &
\end{array}
$$

Le résultat de la division de $P(x)$ par un binôme de la forme $x - b$ est :

$$\frac{P(x)}{x-b} = Q(x) + \frac{R}{x-b}$$

Où R est le reste. L'énoncé qui peut être utilisé pour vérifier la division est :

$$P(x) = (x-b)Q(x) + R$$

Remarque : vous pourriez vérifier cette réponse en développant le produit et en regroupant les termes semblables.

Le résultat sous forme de quotient est :

$$\frac{3x^3 - 5x^2 - 7x - 1}{x-3} = 3x^2 + 4x + 5 + \frac{14}{x-3}$$

L'expression qui peut être utilisée pour vérifier la division est :

$$3x^3 - 5x^2 - 7x - 1 = (x-3)(3x^2 + 4x + 5) + 14$$

Exemple 2 : Trouvez les quotients suivants à l'aide de la division longue. Exprimez le résultat sous forme de quotient. Écrivez également l'énoncé qui peut être utilisé pour vérifier la division (puis vérifiez-le !).

a) $x^2 + 5x + 7$ divisé par $x + 2$

$$
\begin{array}{rr|l}
 & x & +3 \\
\hline
x+2\ ) & x^2 & +5x & +7 \\
 & \underline{x^2} & \underline{+2x} & \\
 & & 3x & +7 \\
 & & \underline{3x} & \underline{+6} \\
 & & R = 1 &
\end{array}
$$

Le résultat sous forme de quotient est :

$$\frac{x^2 + 5x + 7}{x+2} = x + 3 + \frac{1}{x+2}$$

L'expression qui peut être utilisée pour vérifier la division est :

$$x^2 + 5x + 7 = (x+2)(x+3) + 1$$

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

b) $2x^3 - 3x^2 + 8x - 12$ divisé par $x - 1$

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 \ -x \ +7 \\ \hline x-1 & 2x^3 \ -3x^2 \ +8x \ -12 \\ & \underline{2x^3 \ -2x^2} \\ & \quad -x^2 \ +8x \\ & \quad \underline{-x^2 \ +x} \\ & \qquad 7x \ -12 \\ & \qquad \underline{7x \ -7} \\ & \qquad R = \ -5 \end{array}$$

Le résultat sous forme de quotient est :

$$\frac{2x^3 - 3x^2 + 8x - 12}{x - 1} = 2x^2 - x + 7 + \frac{-5}{x - 1}$$

L'expression qui peut être utilisée pour vérifier la division est :

$$2x^3 - 3x^2 + 8x - 12 = (x - 1)(2x^2 - x + 7) - 5$$

c) $4x^3 + 9x - 12$ divisé par $2x + 1$

Remarque : le dividende n'a pas de terme en x^2, alors un terme substitut $0x^2$ est utilisé pour garder les colonnes alignées.

$$\begin{array}{r|l} & 2x^2 \ -x \ +5 \\ \hline 2x+1 & 4x^3 \ +0x^2 \ +9x \ -12 \\ & \underline{4x^3 \ +2x^2} \\ & \quad -2x^2 \ +9x \\ & \quad \underline{-2x^2 \ -x} \\ & \qquad 10x \ -12 \\ & \qquad \underline{10x \ +5} \\ & \qquad R = \ -17 \end{array}$$

Le résultat sous forme de quotient est :

$$\frac{4x^3 + 9x - 12}{2x + 1} = 2x^2 - x + 5 + \frac{-17}{2x + 1}$$

L'expression qui peut être utilisée pour vérifier la division est :

$$4x^3 + 9x - 12 = (2x + 1)(2x^2 - x + 5) - 17$$

Exemple 3 : Le volume, en cm cubes, d'une boîte rectangulaire est donné par $V(x) = x^3 + 7x^2 + 14x + 8$. Déterminez des expressions pour les dimensions possibles de la boîte si la hauteur est donnée par $x + 2$.

Diviser le volume par la hauteur donnera une expression pour l'aire de la base de la boîte. Factorisez l'aire de la base pour obtenir des dimensions possibles pour la longueur et la largeur de la boîte.

$$\begin{array}{r|l} & x^2 \ +5x \ +4 \\ \hline x+2 & x^3 \ +7x^2 \ +14x \ +8 \\ & \underline{x^3 \ +2x^2} \\ & \quad 5x^2 \ +14x \\ & \quad \underline{5x^2 \ +10x} \\ & \qquad 4x \ +8 \\ & \qquad \underline{4x \ +8} \\ & \qquad R = 0 \end{array}$$

$$x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = (x + 2)(x^2 + 5x + 4) = (x + 2)(x + 4)(x + 1)$$

Des expressions pour les dimensions possibles de la boîte sont $x + 1$, $x + 2$, et $x + 4$.

Partie 3 : Théorème du reste

Lorsqu'une fonction polynomiale $P(x)$ est divisée par $x - b$, le reste est $P(b)$; et lorsqu'elle est divisée par $ax - b$, le

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.

reste est $P\left(\frac{b}{a}\right)$, où a et b sont des entiers, et $a \neq 0$.

Exemple 4 : Appliquez le théorème du reste

a) Utilisez le théorème du reste pour déterminer le reste lorsque $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 6$ est divisé par $x + 1$

Puisque $x + 1$ est $x - (-1)$, le reste est $P(-1)$.

$$\begin{aligned} P(-1) &= 2(-1)^3 + (-1)^2 - 3(-1) - 6 \\ &= -2 + 1 + 3 - 6 \\ &= -4 \end{aligned}$$

Par conséquent, le reste est -4

b) Vérifiez votre réponse à l'aide de la division longue

$$\begin{array}{r} 2x^2 \ -x \ -2 \\ \hline x+1 \ )\ 2x^3 \ +x^2 \ -3x \ -6 \\ \underline{2x^3 \ +2x^2} \\ -x^2 \ -3x \\ \underline{-x^2 \ -x} \\ -2x \ -6 \\ \underline{-2x \ -2} \\ R = \ -4 \end{array}$$

Exemple 5 : Utilisez le théorème du reste pour déterminer le reste lorsque $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x - 6$ est divisé par $2x - 3$

Le reste est $P\left(\frac{3}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} P\left(\frac{3}{2}\right) &= 2\left(\frac{3}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) - 6 \\ &= 2\left(\frac{27}{8}\right) + \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 6 \\ &= \frac{27}{4} + \frac{9}{4} - \frac{18}{4} - \frac{24}{4} \\ &= -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Par conséquent, le reste est $-\frac{3}{2}$

Exemple 6 : Déterminez la valeur de k telle que lorsque $3x^4 + kx^3 - 7x - 10$ est divisé par $x - 2$, le reste est 8.

Le reste est $P(2)$. Résolvez pour k lorsque $P(2)$ est fixé égal à 8.

$$\begin{aligned} P(2) &= 3(2)^4 + k(2)^3 - 7(2) - 10 \\ 8 &= 3(2)^4 + k(2)^3 - 7(2) - 10 \\ 8 &= 3(16) + 8k - 14 - 10 \\ 8 &= 48 + 8k - 24 \\ 8 &= 24 + 8k \\ -16 &= 8k \\ -2 &= k \end{aligned}$$

Par conséquent, la valeur de k est -2.

Droits d'auteur © 2026 Annie Bernatchez—Tous droits réservés.