

Combinaisons de fonctions et fonctions réciproques Fiche d'exercices avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

1) Soit $f(x) = 3x - 5$ et $g(x) = 2x + 3$.

a) Écris l'équation de $h(x) = f(x) + g(x)$ et détermine la valeur de $h(2)$.

$$h(x) = (3x - 5) + (2x + 3) = 3x - 5 + 2x + 3 = 5x - 2$$

$$h(2) = 5(2) - 2 = 8$$

b) Écris l'équation de $k(x) = f(x) - g(x)$ et détermine la valeur de $k(2)$.

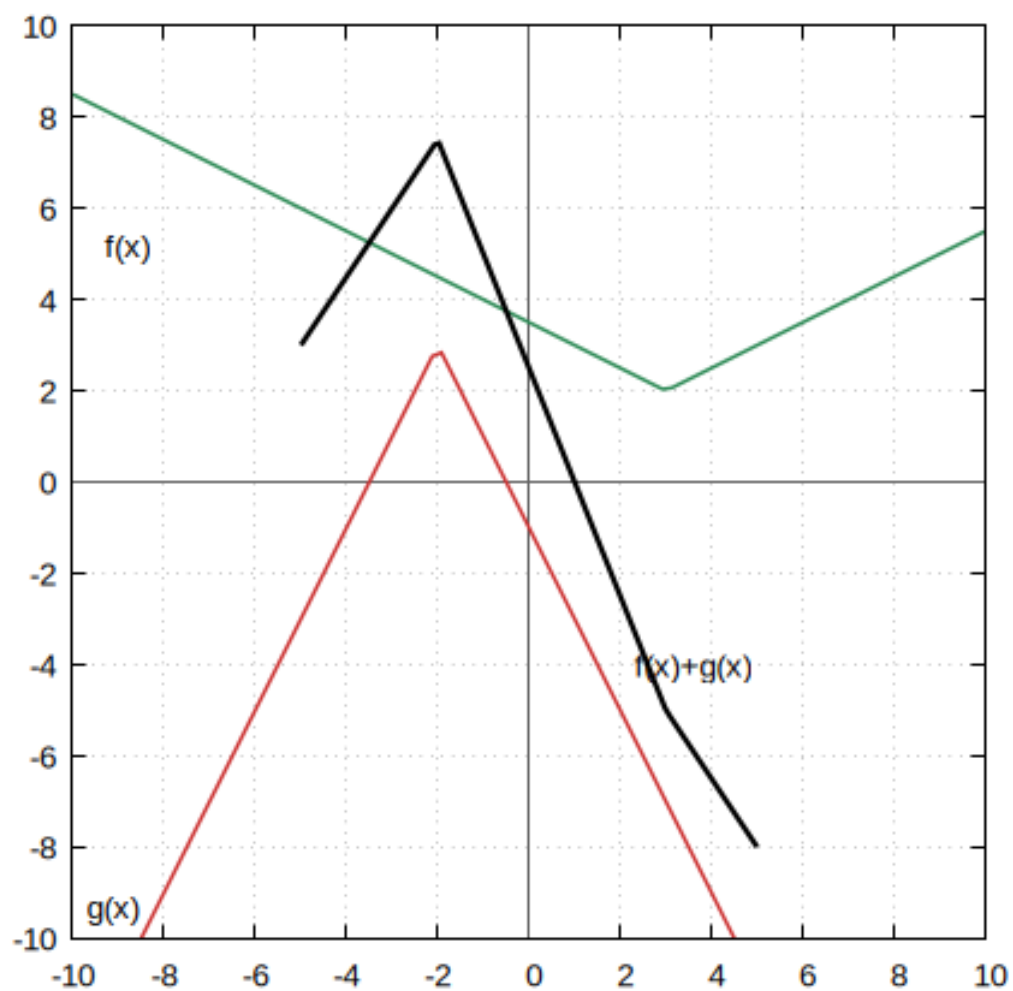
$$k(x) = (3x - 5) - (2x + 3) = 3x - 5 - 2x - 3 = x - 8$$

$$k(2) = 2 - 8 = -6$$

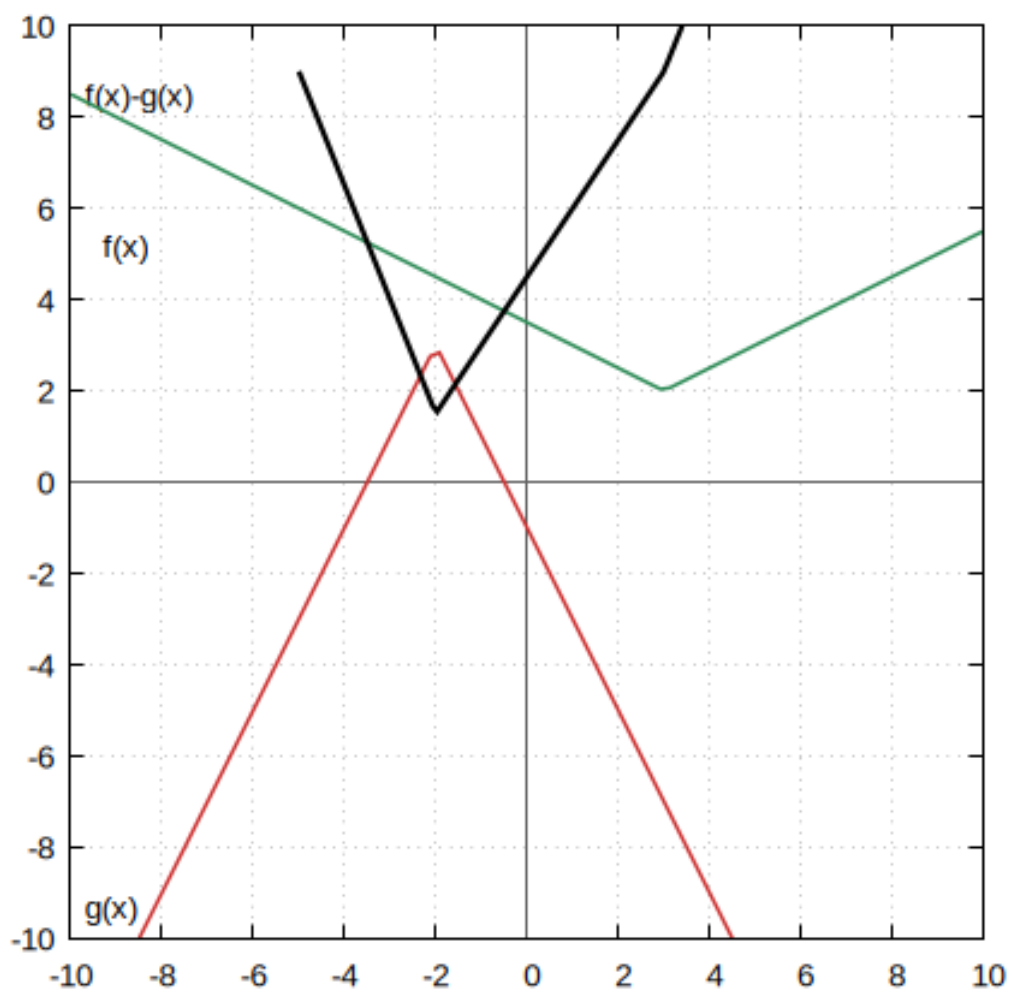
2) Utilise les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ telles qu'illustrées. Applique le principe de superposition pour tracer

a) $y = f(x) + g(x)$

x	$f(x)$	$g(x)$	$f(x) + g(x)$	$f(x) - g(x)$
-5	6	-3	3	9
-4	5.5	-1	4.5	6.5
-3	5	1	6	4
-2	4.5	3	7.5	1.5
-1	4	1	5	3
0	3.5	-1	2.5	4.5
1	3	-3	0	6
2	2.5	-5	-2.5	7.5
3	2	-7	-5	9
4	2.5	-9	-6.5	11.5
5	3	-11	-8	14



b) $y = f(x) - g(x)$



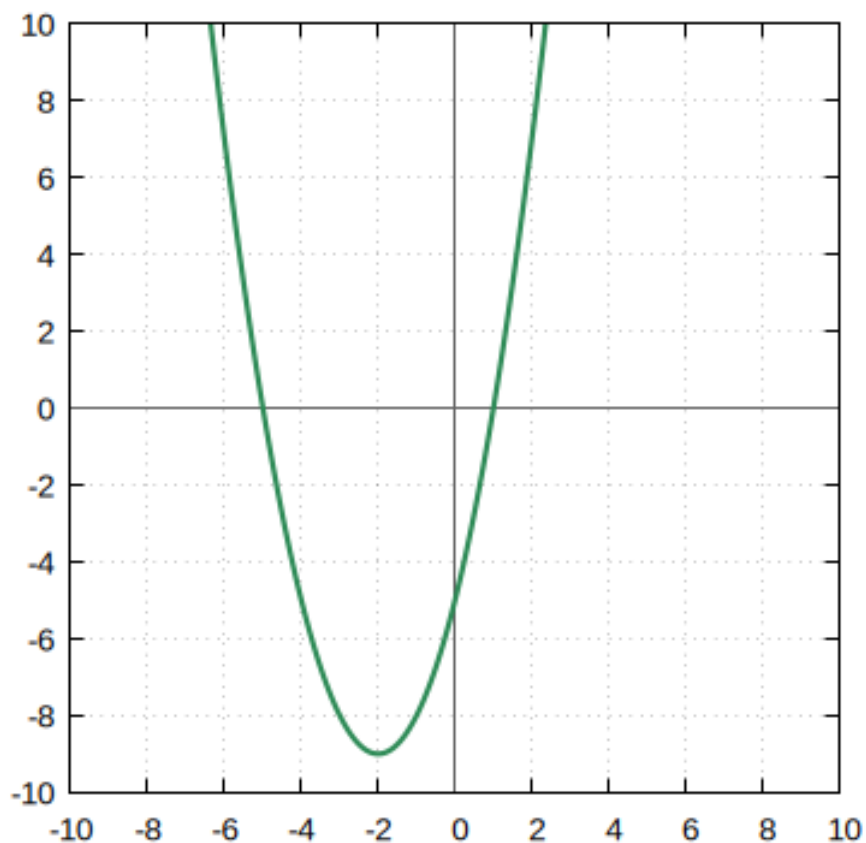
3) Soit $f(x) = x - 2$ et $g(x) = x^2 + 3x - 3$. Détermine un modèle algébrique et graphique pour $h(x) = f(x) + g(x)$.

$$h(x) = (x - 2) + (x^2 + 3x - 3) = x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$$

Abscisses à l'origine : $x = -5$ et $x = 1$

$$x\text{-sommet} = \frac{-5 + 1}{2} = -2; h(-2) = (-2)^2 + 4(-2) - 5 = -9, \text{ donc sommet } (-2, -9)$$

Ordonnée à l'origine : $h(0) = 0^2 + 4(0) - 5 = -5$, donc $(0, -5)$



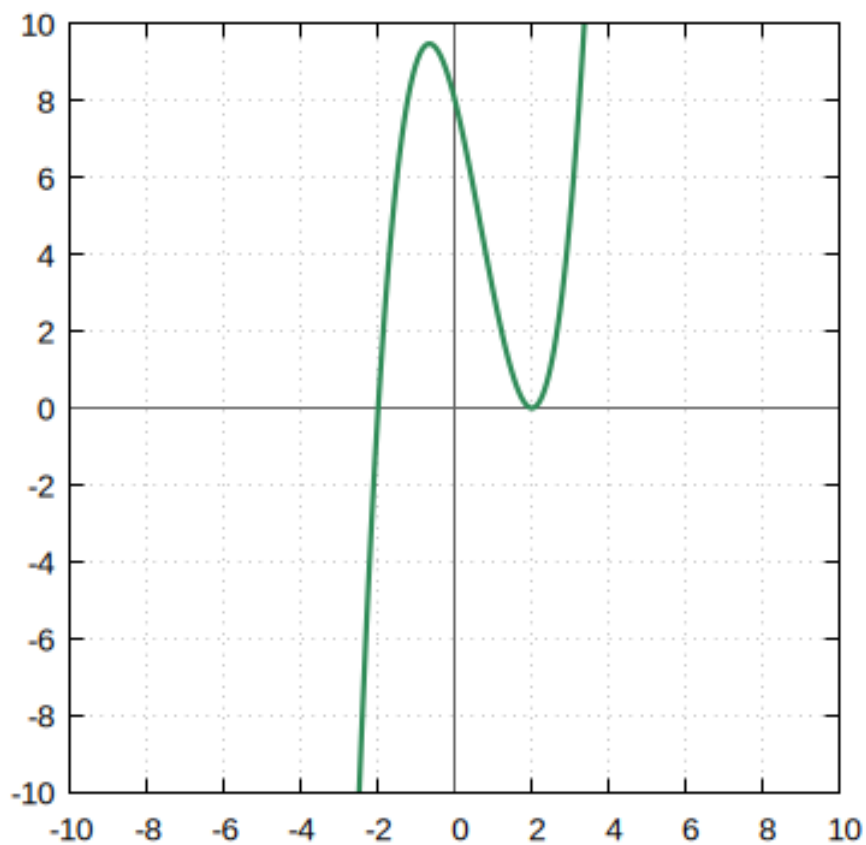
4) Soit $f(x) = x - 2$ et $g(x) = x^2 - 4$. Élabore un modèle algébrique et graphique pour chacune des fonctions suivantes :

a) $y = f(x)g(x)$

$$y = (x - 2)(x^2 - 4) = (x - 2)(x - 2)(x + 2) = (x - 2)^2(x + 2)$$

Abscisses à l'origine : $(2, 0)$ d'ordre 2, $(-2, 0)$ d'ordre 1

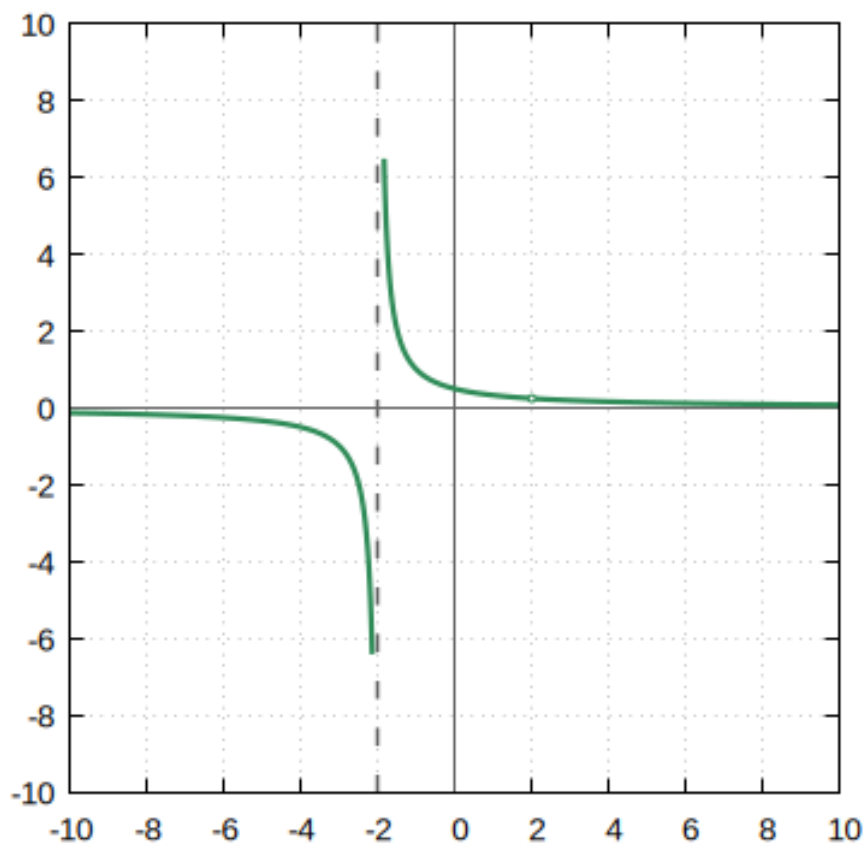
Ordonnée à l'origine : $y = (0 - 2)^2(0 + 2) = 8$, donc $(0, 8)$



b) $y = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$y = \frac{x-2}{x^2-4} = \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2}; x \neq -2, 2$$

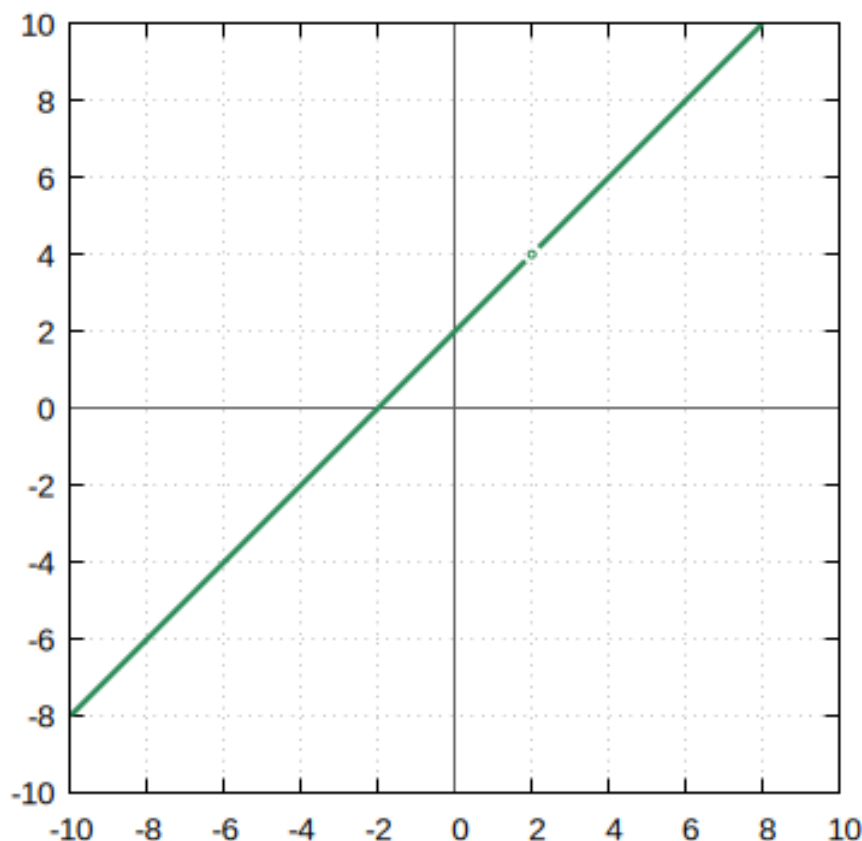
Trou à $x = 2$; AV : $x = -2$; AH : $y = 0$



c) $y = \frac{g(x)}{f(x)}$

$$y = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = x + 2; x \neq 2$$

Trou à $x = 2$



5) Soit $f(x) = x^2 + 2x - 4$ et $g(x) = \frac{1}{x+1}$.

a) Évalue $g(f(0))$

$$f(0) = 0^2 + 2(0) - 4 = -4$$

$$g(f(0)) = g(-4) = \frac{1}{-4+1} = -\frac{1}{3}$$

b) Évalue $f(g(-2))$

$$g(-2) = \frac{1}{-2+1} = -1$$

$$f(g(-2)) = f(-1) = (-1)^2 + 2(-1) - 4 = -5$$

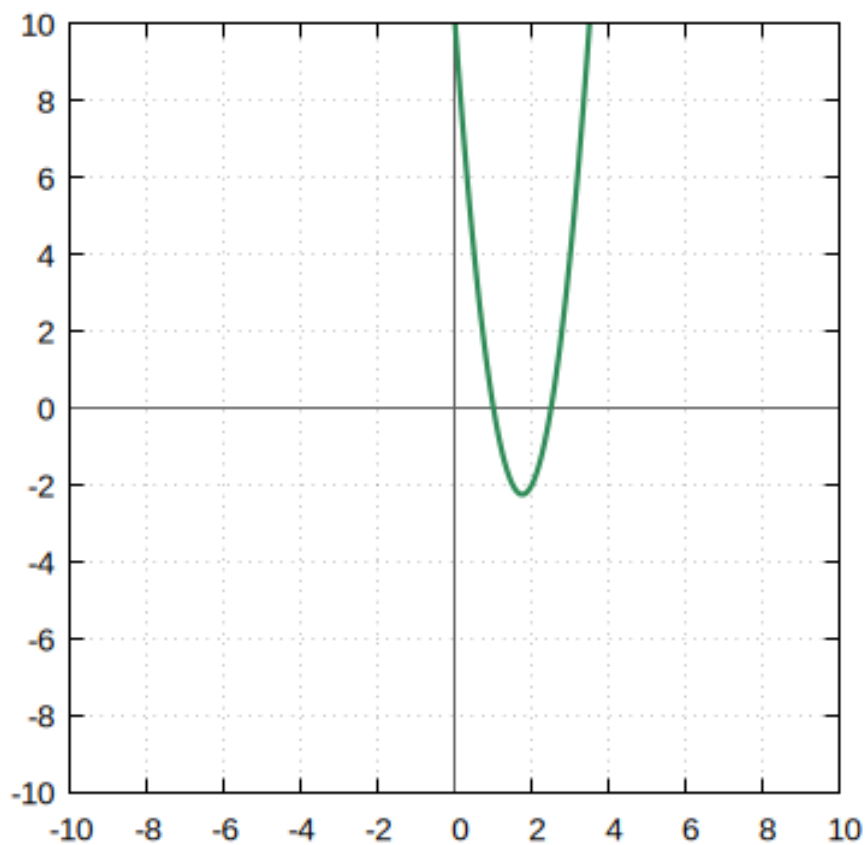
6) Soit $f(x) = x^2 + 3x$ et $g(x) = 2x - 5$. Détermine une équation pour chaque fonction composée et trace son graphique.

a) $y = f(g(x))$

$$f(g(x)) = (2x - 5)^2 + 3(2x - 5) = 4x^2 - 20x + 25 + 6x - 15 = 4x^2 - 14x + 10 = 2(2x^2 - 7x + 5) = 2[x(2x - 5) - 1(2x - 5)] = 2(2x - 5)(x - 1)$$

Abscisses à l'origine : $x = 1$ et $x = 2.5$; ordonnée à l'origine : $(0, 10)$

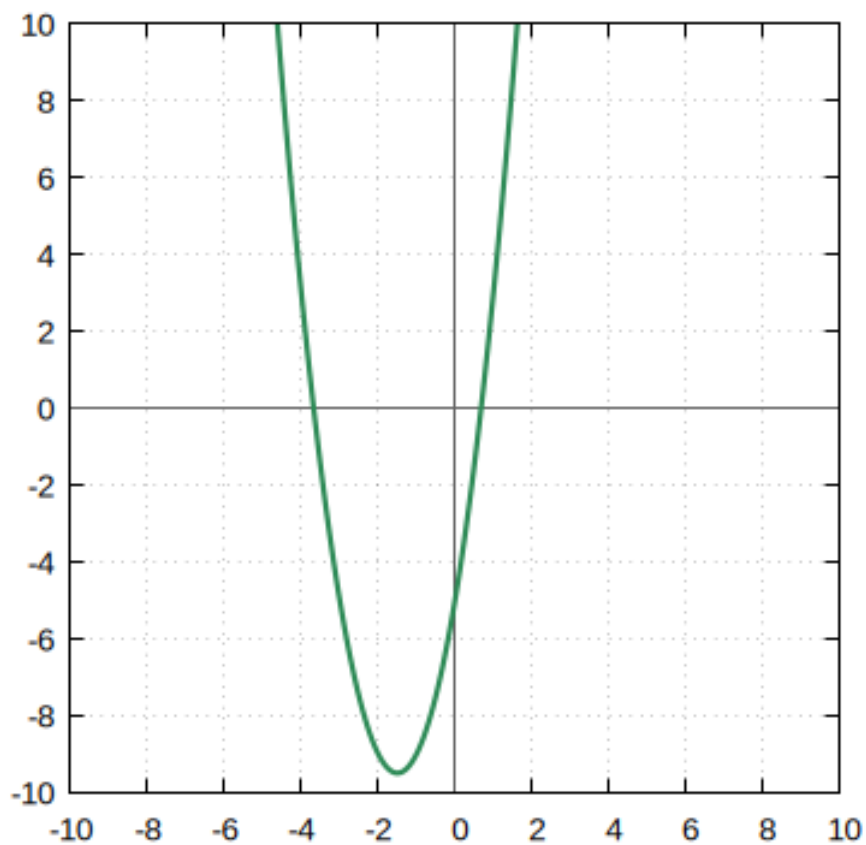
$$x\text{-sommet} = \frac{1 + 2.5}{2} = 1.75; y\text{-sommet} = -2.25$$



b) $y = g(f(x))$

$$g(f(x)) = 2(x^2 + 3x) - 5 = 2x^2 + 6x - 5$$

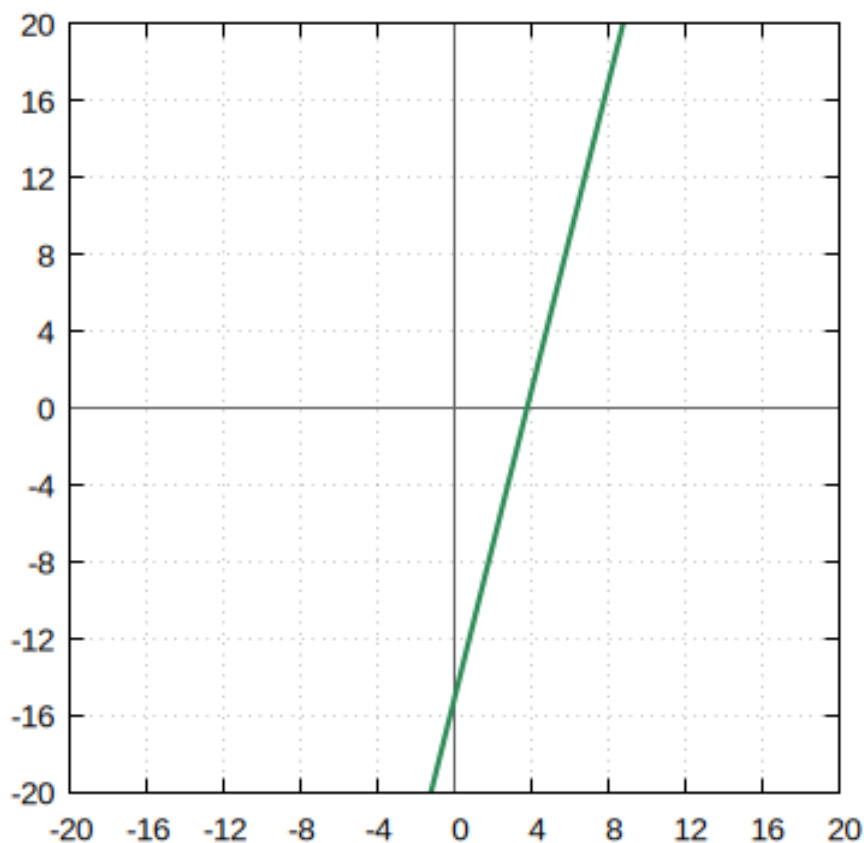
$$x\text{-sommet} = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(2)} = -1.5; \quad y\text{-sommet} = -9.5$$



c) $y = g(g(x))$

$$g(g(x)) = 2(2x - 5) - 5 = 4x - 10 - 5 = 4x - 15$$

$$m = 4, b = -15$$



d) $y = g^{-1}(g(x))$

Pour trouver $g^{-1}(x)$: soit $y = 2x - 5$, échange pour obtenir $x = 2y - 5$, résous : $\frac{x+5}{2} = y$, donc $g^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

$$g^{-1}(g(x)) = \frac{(2x-5)+5}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

$m = 1$, $b = 0$ — c'est la droite identité, puisque l'application de la réciproque d'une fonction immédiatement après la fonction elle-même redonne toujours l'entrée originale.

