

3.4 Résoudre des équations et inéquations rationnelles Leçon avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Expressions rationnelles

Expression rationnelle : le quotient de deux polynômes, $\frac{p(x)}{q(x)}$, où $q(x) \neq 0$

Exemple 1 : Simplifie et indique les restrictions de chaque expression rationnelle

a) $\frac{2x^2 - 8}{x^2 + 3x + 2}$

$$= \frac{2(x^2 - 4)}{(x+2)(x+1)} = \frac{2(x-2)(x+2)}{(x+2)(x+1)} = \frac{2(x-2)}{x+1}; x \neq -2, -1$$

b) $\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{3x^3 - 3}$

$$= \frac{(x^3 - x^2) + (-x + 1)}{3(x^3 - 1)} = \frac{x^2(x-1) - 1(x-1)}{3(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{(x-1)(x^2 - 1)}{3(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{3(x^2 + x + 1)}; x \neq 1$$

Partie 2 : Résoudre des équations rationnelles

Étapes pour résoudre une équation rationnelle :

1. Factorise complètement les deux côtés de l'équation
2. Multiplie les deux côtés par un dénominateur commun (multiplie en croix si approprié)
3. Continue à résoudre comme tu le ferais pour une équation polynomiale normale
4. Indique les restrictions tout au long (valeurs de x qui rendraient le dénominateur égal à zéro)

Exemple 2 : Résous chaque équation

a) $\frac{4}{3x-5} = 4$

$$(3x-5)\left(\frac{4}{3x-5}\right) = 4(3x-5); x \neq \frac{5}{3}$$

$$4 = 4(3x-5)$$

$$4 = 12x - 20$$

$$24 = 12x$$

$$x = 2$$

b) $\frac{6}{x-2} = x-1$

$$(x-2)\left(\frac{6}{x-2}\right) = (x-2)(x-1); x \neq 2$$

$$6 = x^2 - x - 2x + 2$$

$$0 = x^2 - 3x - 4$$

$$0 = (x-4)(x+1)$$

$$x-4=0 \Rightarrow x_1=4; x+1=0 \Rightarrow x_2=-1$$

c) $\frac{x-5}{x^2-3x-4} = \frac{3x+2}{x^2-1}$

$$\frac{x-5}{(x-4)(x+1)} = \frac{3x+2}{(x-1)(x+1)}; x \neq -1, 1, 4$$

$$(x-1)(x+1)(x-4)(x-5) = (x-4)(x+1)(x-1)(3x+2) \text{ — annule le facteur commun } (x+1) \text{ des deux côtés :}$$

$$(x-1)(x-5) = (x-4)(3x+2)$$

$$x^2 - 6x + 5 = 3x^2 - 10x - 8$$

$$0 = 2x^2 - 4x - 13 \text{ — non factorisable, utilise la formule quadratique}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(-13)}}{2(2)} = \frac{4 \pm \sqrt{120}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{30}}{4} = \frac{2(2 \pm \sqrt{30})}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{30}}{2}$$

Partie 3 : Résoudre des inéquations rationnelles

RAPPEL : Résoudre des inégalités est la même chose que résoudre des équations. Cependant, lorsque les deux côtés d'une inégalité sont multipliés ou divisés par un nombre négatif, le signe de l'inégalité doit être inversé.

Étapes pour résoudre une inéquation rationnelle algébriquement :

1. Utilise des opérations inverses pour déplacer tous les termes d'un côté de l'inégalité
2. Combine les expressions à l'aide d'un dénominateur commun
3. Factorise le polynôme
4. Détermine le ou les intervalles où la fonction est positive ou négative en construisant un tableau de signes

Pour construire un tableau de signes :

- Utilise les abscisses à l'origine et les asymptotes verticales pour diviser en intervalles
- Utilise un point d'essai dans chaque intervalle pour déterminer le signe de chaque facteur
- Détermine le signe global du produit en multipliant les signes de chaque facteur dans chaque intervalle.

Exemple 3 : Résous chaque inégalité algébriquement

a) $\frac{x^2 + 6x + 5}{2x^2 - 7x + 3} < 0$

$\frac{(x+5)(x+1)}{(2x-1)(x-3)} < 0$; zéros : $x = -5, -1$; restrictions : $x \neq \frac{1}{2}, 3$

intervalle	$x < -5$	$-5 < x < -1$	$-1 < x < 0.5$	$0.5 < x < 3$	$x > 3$
point d'essai	-6	-2	0	1	4
$x+5$	-	+	+	+	+
$x+1$	-	-	+	+	+
$2x-1$	-	-	-	+	+
$x-3$	-	-	-	-	+
global	+	-	+	-	+

L'inégalité est vraie lorsque $-5 < x < -1$ ou $0.5 < x < 3$, c.-à-d. $x \in (-5, -1) \cup (0.5, 3)$

b) $x - 2 < \frac{8}{x}$

$x - 2 - \frac{8}{x} < 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x - 8}{x} < 0 \Rightarrow \frac{(x-4)(x+2)}{x} < 0$; zéros : $x = -2, 4$; restriction : $x \neq 0$

intervalle	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 4$	$x > 4$
point d'essai	-3	-1	1	5
$x-4$	-	-	-	+
$x+2$	-	+	+	+
x	-	-	+	+
global	-	+	-	+

L'inégalité est vraie lorsque $x < -2$ ou $0 < x < 4$, c.-à-d. $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 4)$

c) $\frac{x+3}{x+1} \geq \frac{x-2}{x-3}$

$\frac{(x+3)(x-3) - (x-2)(x+1)}{(x+1)(x-3)} \geq 0$

$$\frac{x^2 - 9 - (x^2 - x - 2)}{(x+1)(x-3)} \geq 0 \Rightarrow \frac{x-7}{(x+1)(x-3)} \geq 0; \text{zéro : } x = 7; \text{restrictions : } x \neq -1, 3$$

intervalle	$x < -1$	$-1 < x < 3$	$3 < x < 7$	$x > 7$
point d'essai	-2	0	4	8
$x - 7$	-	-	-	+
$x + 1$	-	+	+	+
$x - 3$	-	-	+	+
global	-	+	-	+

L'inégalité est vraie lorsque $-1 < x < 3$ ou $x \geq 7$, c.-à-d. $x \in (-1, 3) \cup [7, \infty)$

d) $\frac{x^3 + 6x^2 - 2x}{x^2 + 4} \geq 2$

$$\frac{x^3 + 6x^2 - 2x - 2(x^2 + 4)}{x^2 + 4} \geq 0 \Rightarrow \frac{x^3 + 4x^2 - 2x - 8}{x^2 + 4} \geq 0$$

$$\frac{x^2(x+4) - 2(x+4)}{x^2 + 4} \geq 0 \Rightarrow \frac{(x+4)(x^2 - 2)}{x^2 + 4} \geq 0; \text{zéros : } x = -4, \pm\sqrt{2}; \text{aucune restriction (} x^2 + 4 \text{ n'est jamais nul)}$$

intervalle	$x < -4$	$-4 < x < -\sqrt{2}$	$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$	$x > \sqrt{2}$
point d'essai	-5	-3	0	2
$x + 4$	-	+	+	+
$x^2 - 2$	+	+	-	+
$x^2 + 4$	+	+	+	+
global	-	+	-	+

L'inégalité est vraie lorsque $-4 \leq x \leq -\sqrt{2}$ ou $x \geq \sqrt{2}$, c.-à-d. $x \in [-4, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$