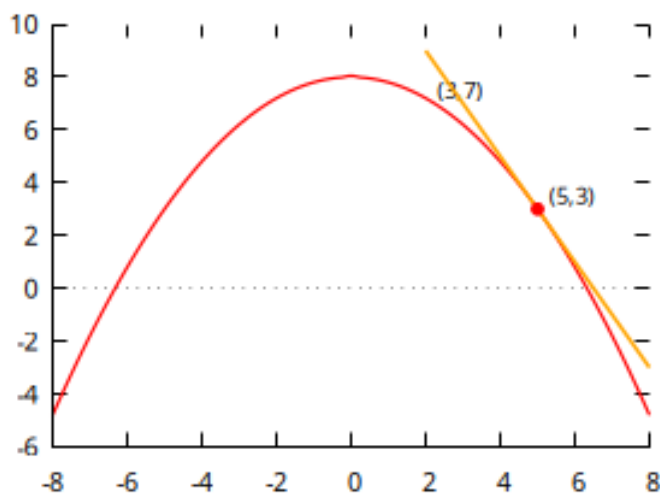


6.2 Taux de variation instantané – Feuille de travail avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

1) Considérer le graphique montré.



a) Indiquer les coordonnées du point de tangence

(5, 3)

b) Indiquer les coordonnées d'un autre point sur la tangente

(3, 7)

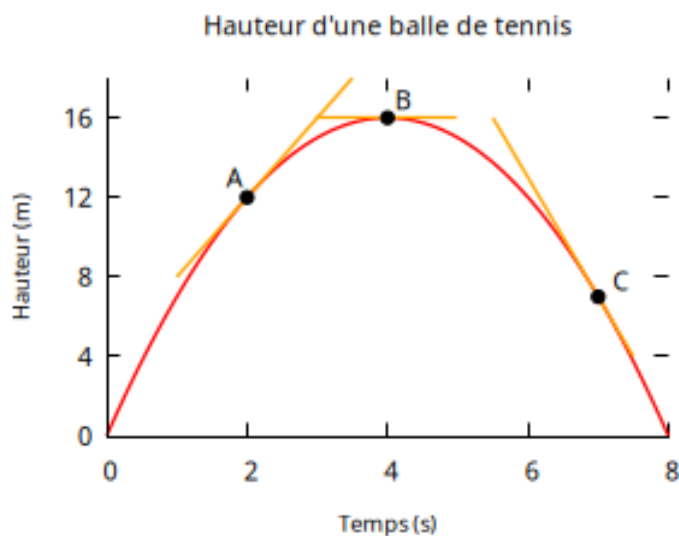
c) Utiliser les points trouvés pour déterminer la pente de la tangente

$$m = \frac{3 - 7}{5 - 3} = \frac{-4}{2} = -2$$

d) Que représente la pente de la tangente?

Le taux de variation instantané à $x = 5$.

2)a) En chacun des points indiqués sur le graphique, le taux de variation instantané est-il positif, négatif, ou nul?



A : positif B : nul C : négatif

b) Estimer le taux de variation instantané aux points A et C.

$$A : \left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=2} \approx \frac{16-12}{3-2} = 4 \text{ m/s}$$

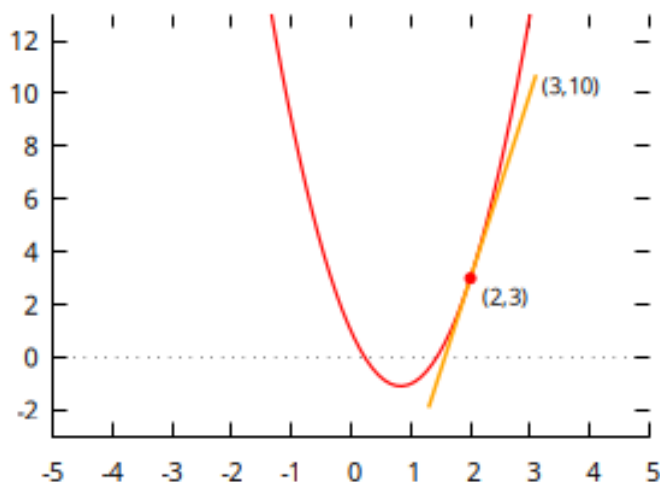
$$C : \left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=7} \approx \frac{13-7}{6-7} = -6 \text{ m/s}$$

c) Interpréter les valeurs de la partie b) pour la situation représentée par le graphique.

Le changement de distance par rapport au temps donne une vitesse.

3) Utiliser le graphique de chaque fonction pour estimer le taux de variation instantané à $x = 2$ en traçant une tangente et en calculant sa pente.

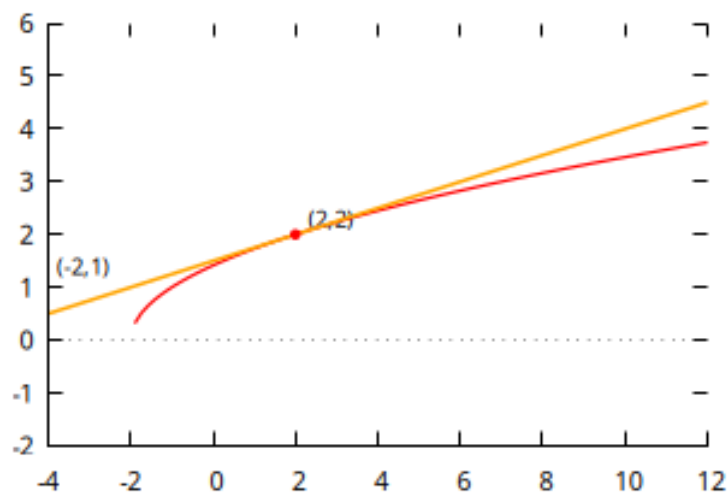
a) $3x^2 - 5x + 1$



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{10-3}{3-2} = 7$$

$$\text{donc } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} \approx 7$$

b) $\sqrt{x+2}$



$$m = \frac{2-1}{2-(-2)} = \frac{1}{4}$$

$$\text{donc } \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} \approx \frac{1}{4}$$

4) Vérifier vos réponses de la question #3 en calculant la LIMITE des pentes des sécantes lorsqu'on s'approche de $x = 2$.

4) Vérifier vos réponses de la question #3 en calculant la LIMITE des pentes des sécantes lorsqu'on s'approche de $x = 2$.

a) $3x^2 - 5x + 1$

Intervalle	Δy	Δx	Pente de la sécante = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
$2 \leq x \leq 2.5$	$= f(2.5) - f(2)$ $= 7.25 - 3$ $= 4.25$	$= 2.5 - 2$ $= 0.5$	$= \frac{4.25}{0.5}$ $= 8.5$
$2 \leq x \leq 2.1$	$= f(2.1) - f(2)$ $= 3.73 - 3$ $= 0.73$	$= 2.1 - 2$ $= 0.1$	$= \frac{0.73}{0.1}$ $= 7.3$
$2 \leq x \leq 2.01$	$= f(2.01) - f(2)$ $= 3.0703 - 3$ $= 0.0703$	$= 2.01 - 2$ $= 0.01$	$= \frac{0.0703}{0.01}$ $= 7.03$
$2 \leq x \leq 2.001$	$= f(2.001) - f(2)$ $= 3.007003 - 3$ $= 0.007003$	$= 2.001 - 2$ $= 0.001$	$= \frac{0.007003}{0.001}$ $= 7.003$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} \approx 7$$

b) $\sqrt{x+2}$

Intervalle	Δy	Δx	Pente de la sécante = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
$2 \leq x \leq 2.5$	$= f(2.5) - f(2)$ $= 2.121320344 - 2$ $= 0.121320344$	$= 2.5 - 2$ $= 0.5$	$= \frac{0.121320344}{0.5}$ $= 0.242640687$
$2 \leq x \leq 2.1$	$= f(2.1) - f(2)$ $= 2.024845673 - 2$ $= 0.024845673$	$= 2.1 - 2$ $= 0.1$	$= \frac{0.024845673}{0.1}$ $= 0.24845673$
$2 \leq x \leq 2.01$	$= f(2.01) - f(2)$ $= 2.002498439 - 2$ $= 0.002498439$	$= 2.01 - 2$ $= 0.01$	$= \frac{0.002498439}{0.01}$ $= 0.2498439$
$2 \leq x \leq 2.001$	$= f(2.001) - f(2)$ $= 2.000249984 - 2$ $= 0.000249984$	$= 2.001 - 2$ $= 0.001$	$= \frac{0.000249984}{0.001}$ $= 0.249984$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} \approx 0.25$$

5) Utiliser le tableau ci-dessous pour estimer la pente de la tangente à la courbe $y = \sqrt{2-x}$ à $x = 1$. Avoir une précision de 4 (quatre) décimales dans la colonne « pente de la sécante ». (4 pts)

Intervalle	Changement en $y = \Delta y$	Δx	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = pente de la sécante
$0 \leq x \leq 1$	$= f(1) - f(0)$ $= 1 - 1.414213562$ $= -0.414213562$	$= 1 - 0$ $= 1$	$= -0.414213562$ ≈ -0.4142
$0.5 \leq x \leq 1$	$= f(1) - f(0.5)$ $= 1 - 1.224744871$ $= -0.224744871$	$= 1 - 0.5$ $= 0.5$	$= \frac{-0.224744871}{0.5}$ ≈ -0.4495

$0.9 \leq x \leq 1$	$= f(1) - f(0.9)$ $= 1 - 1.048808848$ $= -0.048808848$	$= 1 - 0.9$ $= 0.1$	$= \frac{-0.048808848}{0.1}$ ≈ -0.4881
$0.99 \leq x \leq 1$	$= f(1) - f(0.99)$ $= 1 - 1.004987562$ $= -0.004987562$	$= 1 - 0.99$ $= 0.01$	$= \frac{-0.004987562}{0.01}$ ≈ -0.4988
$0.999 \leq x \leq 1$	$= f(1) - f(0.999)$ $= 1 - 1.000499877$ $= -0.000499877$	$= 1 - 0.999$ $= 0.001$	$= \frac{-0.000499877}{0.001}$ ≈ -0.4999

Pente prédite de la tangente lorsque $x = 1 \dots$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = -0.5 \text{ (suivre la tendance de la 4^e colonne)}$$

6) Les données montrent le pourcentage de ménages qui jouent à des jeux sur Internet.

Année	1999	2000	2001	2002	2003
% des ménages	12.3	18.2	24.4	25.7	27.9

a) Déterminer le taux de variation moyen, en pourcentage, des ménages qui ont joué à des jeux sur Internet de 1999 à 2003.

$$m = \frac{\Delta \% \text{ménages}}{\Delta \text{année}} = \frac{27.9 - 12.3}{2003 - 1999} = \frac{15.6}{4} = 3.9 \% / \text{année}$$

b) Estimer le taux de variation instantané, en pourcentage, des ménages qui ont joué à des jeux sur Internet en l'an 2000. Utiliser la méthode de la moyenne d'un intervalle précédent et suivant ET la méthode du choix d'un intervalle englobant.

Méthode 1 : moyenne

$$\text{pour l'intervalle } [1999, 2000] : m = \frac{18.2 - 12.3}{2000 - 1999} = 5.9 \% / \text{année}$$

$$\text{pour l'intervalle } [2000, 2001] : m = \frac{24.4 - 18.2}{2001 - 2000} = 6.2 \% / \text{année}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2000} \approx \frac{5.9 + 6.2}{2} = 6.05 \% / \text{année}$$

Méthode 2 : englobant

$$\text{pour l'intervalle } [1999, 2001] : m = \frac{24.4 - 12.3}{2001 - 1999} = 6.05 \% / \text{année}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2000} \approx 6.05 \% / \text{année}$$

7) Considérer les données ci-dessous décrivant la taille de l'humain moderne le plus grand du monde, Robert Wadlow (1918-1940). À sa mort, à 22 ans, sa taille était de 8 pieds 11,1 pouces.

Âge en années	4	8	10	13	16	18	19	21	22
Taille en cm	160	190	200	220	240	250	260	268	272

a) Trouver le taux de variation moyen de la taille de Wadlow entre les âges de 4 et 22 ans. Montrer les unités et la notation appropriées.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{272 - 160}{22 - 4} = \frac{112}{18} \approx 6.2 \text{ cm} / \text{année}$$

b) Estimer le taux de variation instantané de la taille de Robert Wadlow lorsqu'il avait 16 ans, en utilisant 2 méthodes.

Méthode 1 : moyenne

$$\text{pour l'intervalle } [16, 18] : m = \frac{250 - 240}{18 - 16} = 5 \text{ cm} / \text{année}$$

$$\text{pour l'intervalle } [13, 16] : m = \frac{240 - 220}{16 - 13} = \frac{20}{3} \approx 6.67 \text{ cm} / \text{année}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=16} \approx \frac{5 + 6.67}{2} = 5.835 \text{ cm/année}$$

Méthode 2 : englobant

pour l'intervalle $[13, 18]$: $m = \frac{250 - 220}{18 - 13} = \frac{30}{5} = 6 \text{ cm/année}$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=16} \approx 6 \text{ cm/année}$$

Corrigé

1) a) (5, 3) b) (3, 7) c) $m = -2$ d) taux de variation instantané à $x = 5$

2) a) en A le taux de variation instantané est positif, en B le taux de variation instantané est 0, et en C il est négatif b)
A : $m = 4 \text{ m/s}$ C : $m = -6 \text{ m/s}$ c) vitesse à 2 secondes et 7 secondes

3&4) a) $\frac{dy}{dx} = 7$ b) $\frac{dy}{dx} = 0.25$

5) $\frac{dy}{dx} = -0.5$

6) a) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3.9 \text{ \%/année}$ b) moyenne : $\frac{dy}{dx} = 6.05 \text{ \%/année}$ englobant : $\frac{dy}{dx} = 6.05 \text{ \%/année}$

7) a) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6.2 \text{ cm/année}$ b) moyenne : $\frac{dy}{dx} = 5.83 \text{ cm/année}$ englobant : $\frac{dy}{dx} = 6 \text{ cm/année}$