

6.5 Révision avant-test de l'unité 6 – Inéquations rationnelles et taux de variation avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Section 1 : Équations et inéquations rationnelles

1) Résoudre les équations suivantes

a) $\frac{10}{x+1} = x - 2$ $10 = (x+1)(x-2)$ $0 = x^2 - x - 12$ $0 = (x-4)(x+3)$ $x = 4$ ou $x = -3$	b) $\frac{x+3}{x-1} = 2x+1$ $x+3 = (x-1)(2x+1)$ $0 = 2x^2 - 2x - 4$ $0 = (x-2)(x+1)$ $x = 2$ ou $x = -1$
c) $\frac{3}{3x+2} = \frac{6}{5x}$ $3(5x) = 6(3x+2)$ $15x = 18x + 12$ $-3x = 12$ $x = -4$	d) $\frac{x-2}{x+3} = \frac{x-4}{x+5}$ $(x+5)(x-2) = (x-4)(x+3)$ $x^2 + 3x - 10 = x^2 - x - 12$ $4x = -2$ $x = -\frac{1}{2}$
e) $\frac{2}{x} + \frac{5}{3} = \frac{7}{x}$ $3(2) + 5(x) = 3(7)$ $6 + 5x = 21$ $x = 3$	f) $\frac{10}{x+3} + \frac{10}{3} = 6$ $3(10) + 10(x+3) = 18(x+3)$ $30 + 10x + 30 = 18x + 54$ $6 = 8x$ $x = \frac{3}{4}$
g) $\frac{3}{x} + \frac{4}{x+1} = 2$ $3(x+1) + 4x = 2x(x+1)$ $0 = 2x^2 - 5x - 3$ $0 = (x-3)(2x+1)$ $x = 3$ ou $x = -\frac{1}{2}$	h) $3 = \frac{6}{2x^2 - x - 4}$ $3(2x^2 - x - 4) = 6$ $2x^2 - x - 6 = 0$ $(x-2)(2x+3) = 0$ $x = 2$ ou $x = -\frac{3}{2}$

2) Résoudre les inéquations rationnelles suivantes à l'aide d'un tableau de signes

a) $\frac{6x}{x+1} > 4$

$\frac{6x}{x+1} - 4 > 0$

$\frac{6x - 4(x+1)}{x+1} > 0$

$\frac{2x-4}{x+1} > 0$

zéro : $x = 2$; restriction : $x \neq -1$

Intervalle	$x < -1$	$-1 < x < 2$	$x > 2$
$x - 2$	-	-	+
$x + 1$	-	+	+

global	+	-	+
--------	---	---	---

Solution : $x < -1$ ou $x > 2$, c.-à-d. $x \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

$$b) \frac{1}{2x+10} \geq \frac{1}{x+3}$$

$$\frac{1}{2x+10} - \frac{1}{x+3} \geq 0$$

$$\frac{(x+3) - (2x+10)}{(2x+10)(x+3)} \geq 0$$

$$\frac{-x-7}{(2x+10)(x+3)} \geq 0$$

zéro : $x = -7$; restrictions : $x \neq -5, -3$

Intervalle	$x < -7$	$-7 < x < -5$	$-5 < x < -3$	$x > -3$
$-x-7$	+	-	-	-
$2x+10$	-	-	+	+
$x+3$	-	-	-	+
global	+	-	+	-

Solution : $x \leq -7$ ou $-5 < x < -3$, c.-à-d. $x \in (-\infty, -7] \cup (-5, -3)$

$$c) \frac{2x-3}{x+5} \geq \frac{2x+7}{x-3}$$

$$\frac{(2x-3)(x-3) - (2x+7)(x+5)}{(x+5)(x-3)} \geq 0$$

$$\frac{-26x-26}{(x+5)(x-3)} \geq 0$$

$$\frac{-26(x+1)}{(x+5)(x-3)} \geq 0$$

zéro : $x = -1$; restrictions : $x \neq -5, 3$

Intervalle	$x < -5$	$-5 < x < -1$	$-1 < x < 3$	$x > 3$
$x+1$	-	-	+	+
$x+5$	-	+	+	+
$x-3$	-	-	-	+
global	+	-	+	-

Solution : $x < -5$ ou $-1 \leq x < 3$, c.-à-d. $x \in (-\infty, -5) \cup [-1, 3)$

$$d) \frac{7}{x-3} \geq \frac{2}{x+4}$$

$$\frac{7(x+4) - 2(x-3)}{(x-3)(x+4)} \geq 0$$

$$\frac{5x+34}{(x-3)(x+4)} \geq 0$$

zéro : $x = -6.8$; restrictions : $x \neq -4, 3$

Intervalle	$x < -6.8$	$-6.8 < x < -4$	$-4 < x < 3$	$x > 3$
$5x+34$	-	+	+	+
$x-3$	-	-	-	+
$x+4$	-	-	+	+
global	-	+	-	+

Solution : $-6.8 \leq x < -4$ ou $x > 3$, c.-à-d. $x \in [-6.8, -4) \cup (3, \infty)$

$$e) \frac{x^2 - x - 12}{x-1} < 0$$

$$\frac{(x-4)(x+3)}{x-1} < 0$$

zéros : $x = -3, 4$; restriction : $x \neq 1$

Intervalle	$x < -3$	$-3 < x < 1$	$1 < x < 4$	$x > 4$
$x-4$	-	-	-	+

$x + 3$	-	+	+	+
$x - 1$	-	-	+	+
global	-	+	-	+

Solution : $x < -3$ ou $1 < x < 4$, c.-à-d. $x \in (-\infty, -3) \cup (1, 4)$

$$f) \frac{6x^2 - 5x + 1}{2x + 1} < 0$$

$$\frac{(3x - 1)(2x - 1)}{2x + 1} < 0$$

zéros : $x = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$; restriction : $x \neq -\frac{1}{2}$

Intervalle	$x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$	$x > \frac{1}{2}$
$3x - 1$	-	-	+	+
$2x - 1$	-	-	-	+
$2x + 1$	-	+	+	+
global	-	+	-	+

Solution : $x < -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$, c.-à-d. $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$

$$g) \frac{2x - 10}{x} > x - 5$$

$$\frac{2x - 10}{x} - x + 5 > 0$$

$$\frac{2x - 10 - x^2 + 5x}{x} > 0$$

$$\frac{-x^2 + 7x - 10}{x} > 0$$

$$\frac{-(x - 5)(x - 2)}{x} > 0$$

zéros : $x = 2, 5$; restriction : $x \neq 0$

Intervalle	$x < 0$	$0 < x < 2$	$2 < x < 5$	$x > 5$
$-(x - 5)$	+	+	+	-
$x - 2$	-	-	+	+
x	-	+	+	+
global	+	-	+	-

Solution : $x < 0$ ou $2 < x < 5$, c.-à-d. $x \in (-\infty, 0) \cup (2, 5)$

Section 2 : Taux de variation moyen et instantané

3) Considérer les données suivantes pour un pneu de voiture qui fuit :

Minutes depuis le début de la fuite	0	5	10	15	20	25	30
Pression de l'air dans le pneu en kilopascals (kPa)	400	335	295	255	225	195	170

a) Calculer le taux de variation moyen sur l'intervalle de 30 minutes. Expliquer la signification de ce taux à l'aide des unités appropriées.

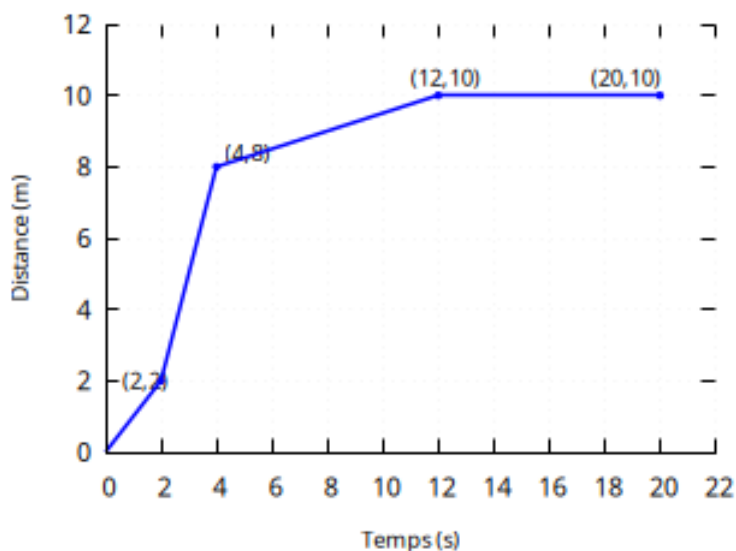
$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{170 - 400}{30 - 0} = \frac{-230}{30} \approx -7.67 \text{ kPa/min}$$

Sur les 30 minutes, le pneu a perdu en moyenne 7.67 kPa d'air par minute.

b) Estimer le taux de variation instantané à 5 minutes à l'aide d'un intervalle environnant.

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=5} \approx \frac{295 - 400}{10 - 0} = \frac{-105}{10} = -10.5 \text{ kPa/min}$$

4) Le graphique ci-contre représente la fuite d'un campagnol effrayé par un faucon volant à proximité. Décrire le mouvement du campagnol suggéré par le graphique.



Le campagnol part au repos, s'élance très rapidement de $t = 0$ à $t = 4$ secondes (une fuite rapide), ralentit considérablement entre $t = 4$ et $t = 12$ secondes, puis s'immobilise complètement (la distance reste constante) à partir de $t = 12$ secondes.

a) Quelle est la vitesse moyenne du campagnol sur les intervalles...

i) $[0, 4]$

$$m = \frac{8 - 0}{4 - 0} = \frac{8}{4} = 2 \text{ m/s}$$

ii) $[4, 12]$

$$m = \frac{10 - 8}{12 - 4} = \frac{2}{8} = 0.25 \text{ m/s}$$

iii) $[4, 20]$

$$m = \frac{10 - 8}{20 - 4} = \frac{2}{16} = 0.125 \text{ m/s}$$

b) Estimer le taux de variation instantané (la vitesse) du campagnol à 2 secondes. Utiliser une moyenne de 2 sécantes.

$$m \text{ pour } [0, 2] : \frac{2 - 0}{2 - 0} = 1 \text{ m/s}$$

$$m \text{ pour } [2, 4] : \frac{8 - 2}{4 - 2} = 3 \text{ m/s}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} \approx \frac{1 + 3}{2} = 2 \text{ m/s}$$

5) Pour la fonction $f(x) = x^2 - 3x + 2$

a) Calculer le taux de variation moyen pour les intervalles suivants

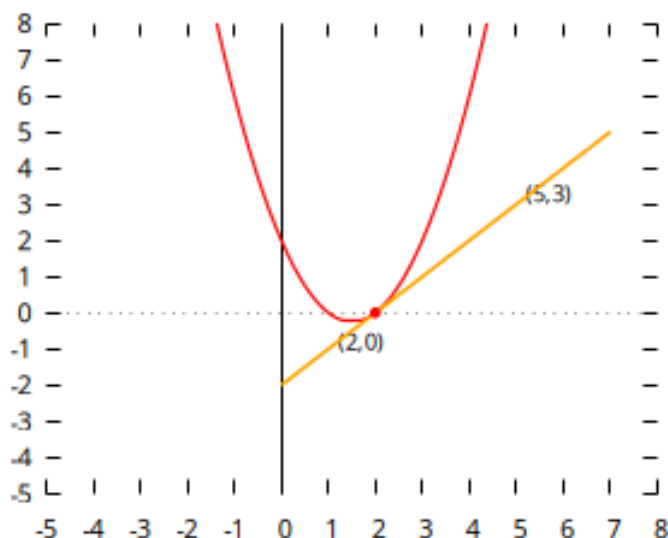
i) $-1 \leq x \leq 2$

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} \\ &= \frac{0 - 6}{3} \\ &= -2 \end{aligned}$$

ii) $4 \leq x \leq 8$

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(8) - f(4)}{8 - 4} \\ &= \frac{42 - 6}{4} \\ &= 9 \end{aligned}$$

b) Utiliser le graphique de la fonction pour estimer le taux de variation instantané à $x = 2$ en traçant une tangente et en calculant sa pente.



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3 - 0}{5 - 2} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{donc } \frac{dy}{dx} \Big|_{x=2} \approx 1$$

c) Vérifier vos réponses de la partie b) en calculant la LIMITE des pentes des sécantes lorsqu'on s'approche de $x = 2$.

Intervalle	Δy	Δx	Pente de la sécante = $\frac{\Delta y}{\Delta x}$
$2 \leq x \leq 2.5$	$= f(2.5) - f(2)$ $= 0.75 - 0$ $= 0.75$	$= 2.5 - 2$ $= 0.5$	$= \frac{0.75}{0.5}$ $= 1.5$
$2 \leq x \leq 2.1$	$= f(2.1) - f(2)$ $= 0.11 - 0$ $= 0.11$	$= 2.1 - 2$ $= 0.1$	$= \frac{0.11}{0.1}$ $= 1.1$
$2 \leq x \leq 2.01$	$= f(2.01) - f(2)$ $= 0.0101 - 0$ $= 0.0101$	$= 2.01 - 2$ $= 0.01$	$= \frac{0.0101}{0.01}$ $= 1.01$
$2 \leq x \leq 2.001$	$= f(2.001) - f(2)$ $= 0.001001 - 0$ $= 0.001001$	$= 2.001 - 2$ $= 0.001$	$= \frac{0.001001}{0.001}$ $= 1.001$

Estimation du taux de variation instantané à $x = 2$...

$$\frac{dy}{dx} \Big|_{x=2} \approx 1$$

6) Utiliser les données suivantes pour la température en degrés Celsius d'un four à bois.

Temps en minutes	0	5	8	10	13	15	19	21	25
Temp (°C)	25	120	205	250	290	280	290	285	285

a) Trouver le taux de variation moyen de la température entre 0 et 25 minutes. Indiquer les unités et la notation appropriées.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{285 - 25}{25 - 0} = \frac{260}{25} = 10.4 \text{ } ^\circ\text{C/min}$$

b) Estimer le taux de variation instantané de la température à 10 minutes. Utiliser 2 méthodes.

Méthode 1 : intervalle environnant

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=10} \approx \frac{290 - 205}{13 - 8} = \frac{85}{5} = 17 \text{ } ^\circ\text{C/min}$$

Méthode 2 : moyenne des intervalles précédent et suivant

$$m \text{ pour } [8, 10] : \frac{250 - 205}{10 - 8} = \frac{45}{2} = 22.5 \text{ } ^\circ\text{C/min}$$

$$m \text{ pour } [10, 13] : \frac{290 - 250}{13 - 10} = \frac{40}{3} \approx 13.3 \text{ } ^\circ\text{C/min}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=10} \approx \frac{22.5 + 13.3}{2} \approx 17.9 \text{ } ^\circ\text{C/min}$$

Section 3 : Quotient de Newton

7) Trouver l'équation de la dérivée pour chacune des fonctions suivantes. Aussi, trouver le taux de variation instantané de la fonction lorsque $x = -2$ et $x = 3$.

a) $f(x) = 4x - 1$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(x+h) - 1 - (4x - 1)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4h}{h}$$

$$f'(x) = 4$$

$$f'(-2) = 4, \quad f'(3) = 4$$

b) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 5(x+h) + 2 - (3x^2 - 5x + 2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2 - 5h}{h}$$

$$f'(x) = 6x - 5$$

$$f'(-2) = -17, \quad f'(3) = 13$$

c) $f(x) = -2x^3 + 3x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2(x+h)^3 + 3(x+h)^2 - (-2x^3 + 3x^2)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-6x^2 - 6xh - 2h^2 + 6x + 3h)}{h}$$

$$f'(x) = -6x^2 + 6x$$

$$f'(-2) = -36, \quad f'(3) = -36$$

8) Déterminer l'équation de la tangente à $x = -2$ pour la fonction de la partie b) $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$

$$f(-2) = 3(-2)^2 - 5(-2) + 2 = 24, \text{ donc } (-2, 24) \text{ est sur la tangente}$$

$$f'(-2) = -17, \text{ donc la pente de la tangente est } -17$$

$$y = mx + b$$

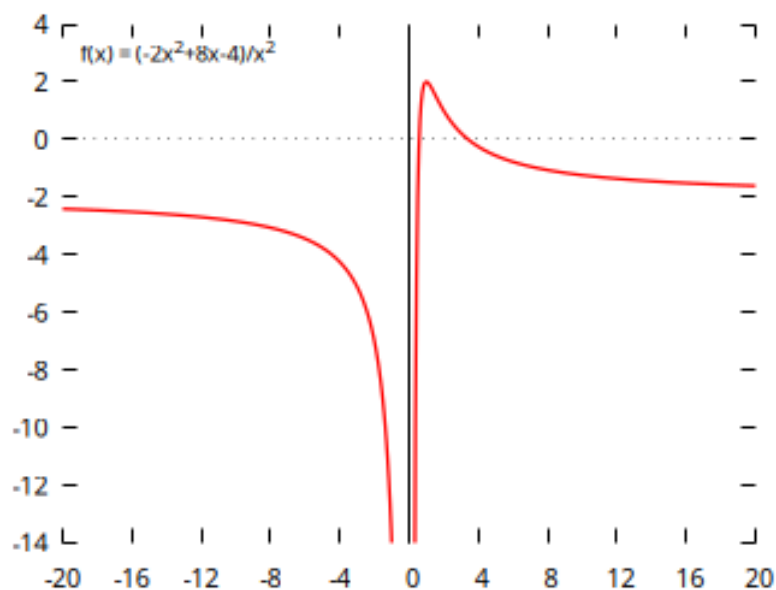
$$24 = -17(-2) + b$$

$$b = -10$$

$$y = -17x - 10$$

Section 4 : Limites

9) Utiliser le graphique pour trouver les limites suivantes



a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$

$= -2$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$= -2$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$= -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

$= -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$= -\infty$

10) Évaluer chaque limite si elle existe

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^2 + 8x}{2x + 1}$ $= \frac{-(3)^2 + 8(3)}{2(3) + 1}$ $= \frac{15}{7}$	b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 5x - 2}{x^2 - 2x - 8}$ $= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(3x - 1)(x + 2)}{(x - 4)(x + 2)}$ $= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x - 1}{x - 4}$ $= \frac{3(-2) - 1}{-2 - 4} = \frac{-7}{-6} = \frac{7}{6}$
c) $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 49}{x - 7}$ $= \lim_{x \rightarrow 7} \frac{(x - 7)(x + 7)}{x - 7}$ $= \lim_{x \rightarrow 7} x + 7$ $= 7 + 7 = 14$	d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{2x^2 - 5x}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9x}{x(2x - 5)}$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{9}{2x - 5}$ $= \frac{9}{2(0) - 5} = -\frac{9}{5}$

Corrigé

1) a) -3 , 4 b) -1 , 2 c) -4 d) $-\frac{1}{2}$ e) 3 f) $\frac{3}{4}$ g) 3, $-\frac{1}{2}$ h) 2, $-\frac{3}{2}$

2) a) $x < -1$ ou $x > 2$ b) $x \leq -7$ ou $-5 < x < -3$ c) $x < -5$ ou $-1 \leq x < 3$ d) $-6.8 \leq x < -4$ ou $x > 3$ e) $x < -3$ ou $1 < x < 4$ f) $x < -\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ g) $x < 0$ ou $2 < x < 5$

3) a) $m = -7.67$ kPa/min, ce qui signifie que sur l'intervalle de 30 minutes, le pneu a perdu en moyenne 7.67 kPa de pression d'air par minute. b) $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=5} \approx -10.5$ kPa/min

4) a) i) $m = 2$ m/s ii) $m = 0.25$ m/s iii) $m = 0.125$ m/s b) $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} \approx 2$ m/s

5) a) i) $m = -2$ ii) $m = 9$ b),c) $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} \approx 1$

6) a) $m = 10.4$ °C/min b) intervalle environnant : $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=10} \approx 17$ °C/min, moyenne des intervalles : $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=10} \approx 17.9$ °C/min

7) a) $f'(x) = 4$, $f'(-2) = 4$, $f'(3) = 4$ b) $f'(x) = 6x - 5$, $f'(-2) = -17$, $f'(3) = 13$ c) $f'(x) = -6x^2 + 6x$, $f'(-2) = -36$, $f'(3) = -36$

8) $y = -17x - 10$

9) a) -2 b) -2 c) $-\infty$ d) $-\infty$ e) $-\infty$

10) a) $\frac{15}{7}$ b) $\frac{7}{6}$ c) 14 d) $-\frac{9}{5}$