

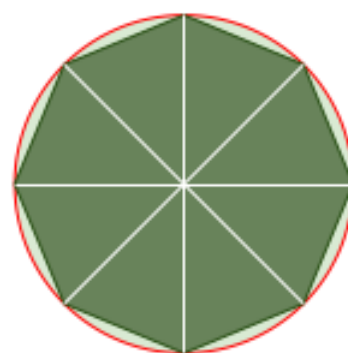
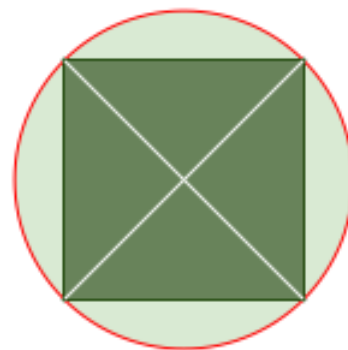
6.4 Limites – Leçon avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Le mathématicien grec Archimède a développé une preuve de la formule de l'aire d'un cercle, $A = \pi r^2$. Sa méthode, connue sous le nom de « méthode d'exhaustion », consistait à calculer l'aire de polygones réguliers inscrits dans le cercle. L'aire du polygone fournit une estimation de l'aire du cercle. À mesure qu'Archimède augmentait le nombre de côtés du polygone, sa forme se rapprochait de plus en plus de celle d'un cercle. Un octogone fournit une bien meilleure estimation de l'aire d'un cercle qu'un carré. Qu'en est-il d'un myriagone, un polygone à 10 000 côtés? Qu'advient-il de l'estimation lorsque le nombre de côtés tend vers l'infini?

La méthode d'Archimède pour trouver l'aire d'un cercle repose sur le concept de LIMITE. Le cercle est la forme limite du polygone. À mesure que le nombre de côtés augmente, l'aire du polygone s'approche de sa limite, la forme d'un cercle, sans jamais devenir un véritable cercle. Vous avez utilisé une stratégie semblable pour estimer le taux de variation instantané d'une fonction. Votre estimation devenait de plus en plus précise à mesure que l'intervalle entre deux points diminuait. Grâce aux limites, l'intervalle peut être rendu infiniment petit, s'approchant de zéro. Lorsque cela se produit, la pente de la sécante s'approche de sa valeur limite, la pente de la tangente.



Section 1 : Introduction aux limites

Exemple 1 : Compléter le tableau suivant :

x	2	2.5	2.9	2.99	3	3.01	3.1	3.5	4
$y = x^2 - 2$	2	4.25	6.41	6.9401	7	7.0601	7.61	10.25	14

Trouver la limite lorsque x s'approche de 3 par la gauche

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 2) = 7$$

Trouver la limite lorsque x s'approche de 3 par la droite

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 2) = 7$$

Donc,

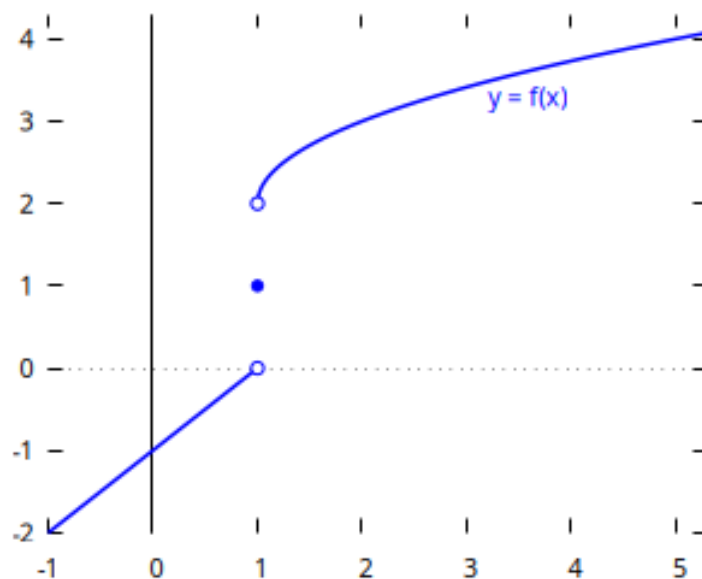
$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 2) = 7$$

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe si les 3 critères suivants sont respectés

1. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existe
2. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe
3. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$

Section 2 : Trouver des limites à partir d'un graphique

Exemple 2 : Étant donné le graphique suivant de la fonction définie par morceaux $f(x) = \begin{cases} x - 1, & \text{si } x < 1 \\ 1, & \text{si } x = 1 \\ 2 + \sqrt{x - 1}, & \text{si } x > 1 \end{cases}$

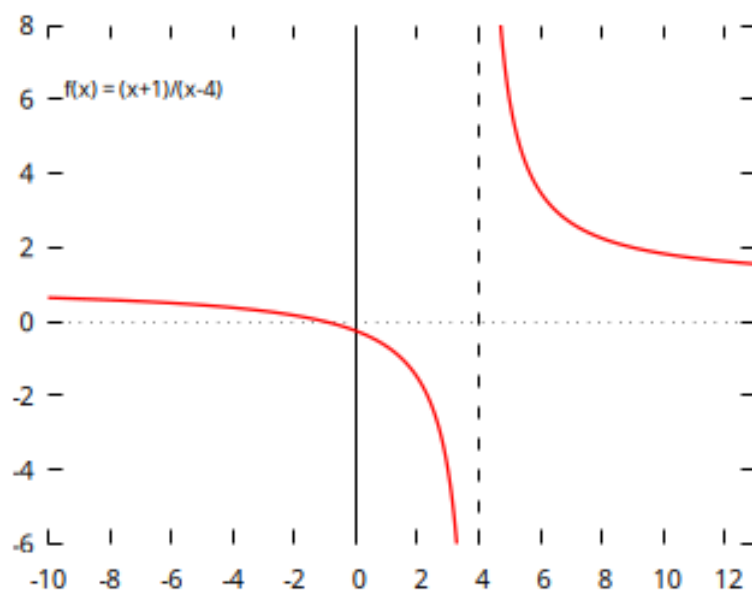


$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ n'existe pas puisque $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

Exemple 3 : Utiliser le graphique de $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$ pour trouver :



$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \infty$$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ n'existe pas

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

Remarque : Si le numérateur et le dénominateur sont de même degré, le quotient des coefficients directeurs indique où se trouvera l'asymptote horizontale.

Section 3 : Limite d'une fonction à partir d'un graphique (forme indéterminée)

Exemple 4 : Analyser l'équation, le tableau et le graphique de $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ pour trouver $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

x	0	0.5	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1	1.5	2
$\frac{x^2-1}{x-1}$	1	1.5	1.9	1.99	1.999	non défini	2.001	2.01	2.1	2.5	3

x s'approche de 1 par la gauche $\rightarrow$

$\leftarrow x$ s'approche de 1 par la droite

$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ s'approche de 2 par en dessous $\rightarrow$

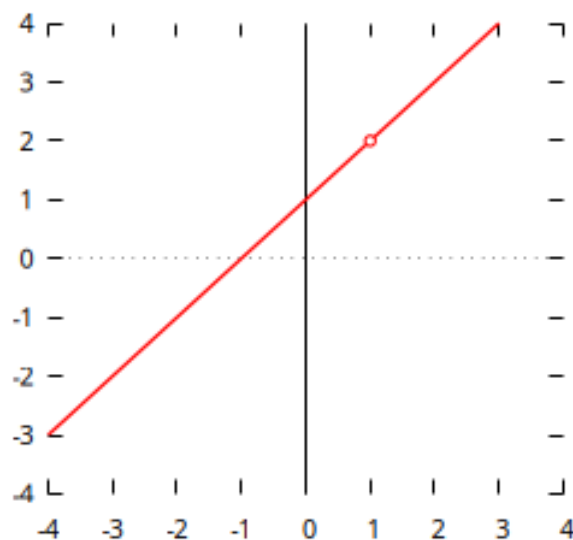
$\leftarrow f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ s'approche de 2 par au-dessus

Ce tableau et ce graphique suggèrent que

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$



Cependant, en substituant $x = 1$ dans l'équation, on obtient $\frac{0}{0}$, ce qu'on appelle la forme indéterminée. La fonction n'est pas définie en ce point. Cependant, il n'est pas nécessaire que la fonction soit définie en un point pour que sa limite existe. Essayer de factoriser pour voir s'il s'agit d'une discontinuité amovible :

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 \\
 &= 1 + 1 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Section 4 : Limite d'une fonction à partir d'une équation (forme indéterminée)

Exemple 5 : Trouver les limites suivantes.

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 3} \\
 &= \frac{(-1)^2 - 4}{(-1)^2 + 3} \\
 &= \frac{-3}{4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 1)}{x - 3} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} x + 1 \\
 &= 4
 \end{aligned}$$