

6.3 Quotient de Newton – Leçon avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

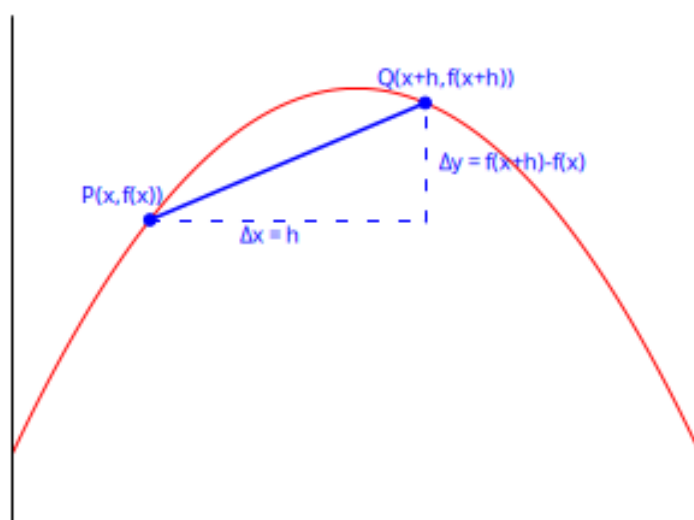
Partie 1 : Différence entre le taux de variation moyen et le taux de variation instantané

Taux de variation moyen	Taux de variation instantané
Sur un intervalle	En un point précis
Pente de la sécante	Pente de la tangente
Calculé	Estimé
m	$\frac{dy}{dx}$

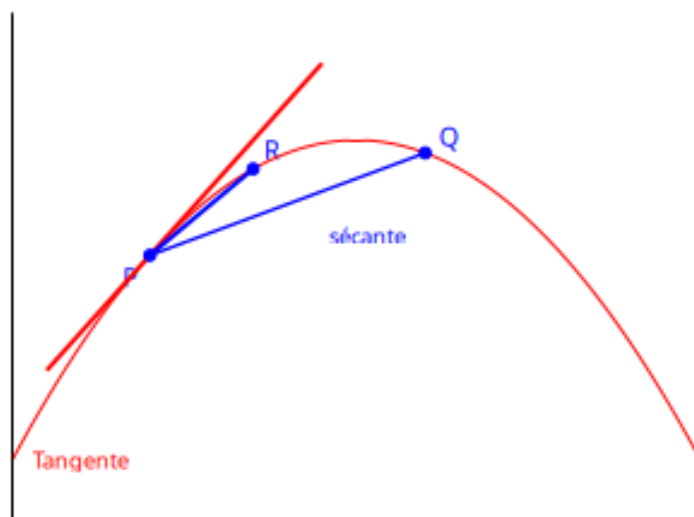
Partie 2 : Estimer le taux de variation instantané à l'aide du quotient de différence

En observant le graphique de $f(x) = -0.2(x - 5)^2 + 6$, les points $P(x, f(x))$ et $Q(x + h, f(x + h))$ sont sur le graphique de la fonction. En reliant les points, on obtient une sécante.

Trouver la pente de la sécante nous indiquera le taux de variation moyen entre les deux points.



Plus on déplace le point Q vers le point P, plus le taux de variation moyen s'approchera du taux de variation instantané en P. Autrement dit, la pente de la sécante s'approchera de plus en plus de la pente de la tangente en P. Remarquer que la pente de PR est beaucoup plus proche de la pente de la tangente que ne l'est celle de PQ.



Plus la différence des valeurs de x est petite (plus la sécante est courte), plus on s'approche du taux de variation instantané réel. Que se passe-t-il si on rend la différence des valeurs de x égale à 0? Cela nous donnerait exactement le taux de variation instantané, mais comment diviser par 0?

Nous devons trouver la LIMITE des pentes des sécantes lorsque Δx s'approche de 0.

Il est souvent utile de trouver l'équation générale du taux de variation instantané de $f(x)$ qui peut être utilisée pour trouver la pente de la tangente en tout point du domaine. Cette équation est appelée la « dérivée » et s'écrit $f'(x)$.

Table 1. Quotient de Newton

Le taux de variation instantané en tout x pour $y = f(x)$ est

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

C'est ce qu'on appelle la « dérivée par définition ».

Exemple 1 : Trouver une équation pour le taux de variation instantané de $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x + 1$. Puis utiliser l'équation pour trouver $f'(4)$.

Remarque : Pour trouver une formule générale du taux de variation instantané, laisser les x dans l'équation.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}(x+h)^2 - (x+h) + 1 - \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}(x^2 + 2xh + h^2) - x - h + 1 - \frac{1}{4}x^2 + x - 1}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}xh + \frac{1}{4}h^2 - x - h + 1 - \frac{1}{4}x^2 + x - 1}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}xh + \frac{1}{4}h^2 - h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}h - 1\right)}{h}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}(0) - 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - 1$$

$$f'(4) = \frac{1}{2}(4) - 1$$

$$f'(4) = 1$$

Exemple 2 : Trouver une formule pour le taux de variation instantané de la fonction $f(x) = x^2 - 5x + 4$

$$f(x+h) = (x+h)^2 - 5(x+h) + 4$$

$$= x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h + 4$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h + 4 - (x^2 - 5x + 4)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h + 4 - x^2 + 5x - 4}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 5h}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h - 5)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h - 5$$

$$f'(x) = 2x + 0 - 5$$

$$f'(x) = 2x - 5$$