

6.2 Taux de variation instantané – Leçon avec solutions

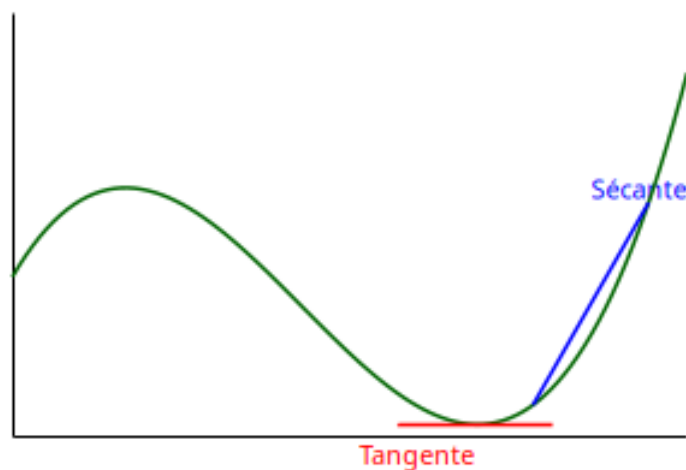
Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Révision du taux de variation moyen

Un taux de variation moyen correspond à la pente d'une **SÉCANTE** entre deux points sur une courbe.

Un taux de variation instantané correspond à la pente d'une **TANGENTE** en un point précis d'une courbe.



Exemple 1 : La hauteur, h , en mètres, après t secondes est modélisée par l'équation $h(t) = -4.9t^2 + 14t + 1$. Déterminer le taux de variation moyen de la hauteur du ballon pour chaque intervalle de temps.

a) $[0, 0.5]$

$$h(0) = -4.9(0)^2 + 14(0) + 1$$

$$h(0) = 1$$

$$h(0.5) = -4.9(0.5)^2 + 14(0.5) + 1$$

$$h(0.5) = 6.775$$

$$m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(0.5) - h(0)}{0.5 - 0} = \frac{6.775 - 1}{0.5} = 11.55 \text{ m/s}$$

b) $[1, 2.5]$

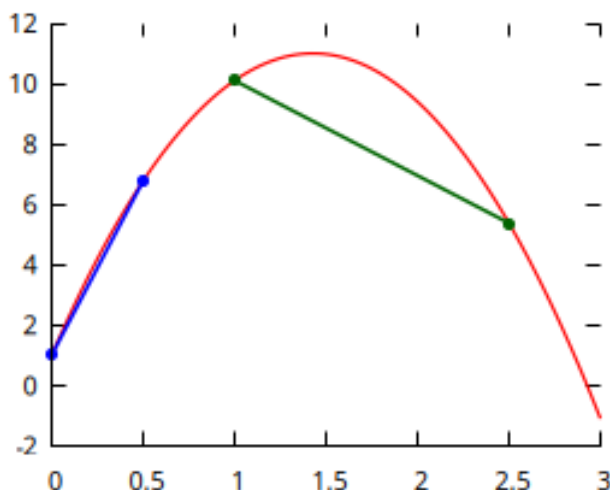
$$h(1) = -4.9(1)^2 + 14(1) + 1$$

$$h(1) = 10.1$$

$$h(2.5) = -4.9(2.5)^2 + 14(2.5) + 1$$

$$h(2.5) = 5.375$$

$$m = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h(2.5) - h(1)}{2.5 - 1} = \frac{5.375 - 10.1}{1.5} = -3.15 \text{ m/s}$$



Partie 2 : Déterminer le taux de variation instantané à partir d'un graphique ou d'un tableau

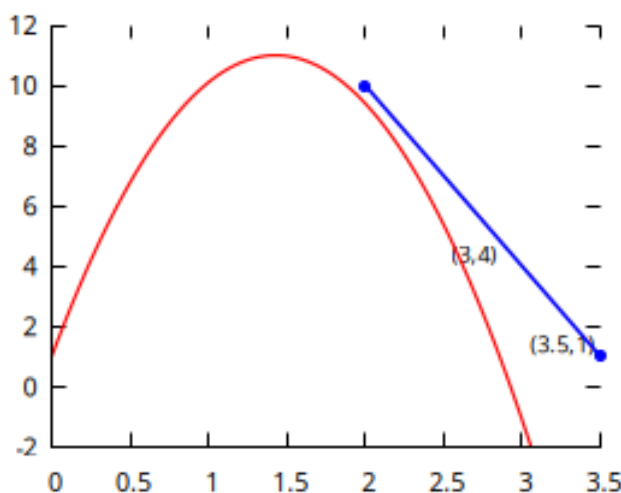
Taux de variation instantané : Le taux de variation exact d'une fonction en une valeur précise de la variable indépendante. Peut être estimé en utilisant des taux de variation moyens sur de petits intervalles de la variable indépendante.

Remarque : la meilleure estimation du taux de variation instantané est obtenue lorsque l'intervalle utilisé pour calculer le taux de variation moyen est rendu aussi petit que possible.

Exemple 2 : Trouver le taux de variation instantané de la hauteur du ballon à 2 secondes. L'équation de la hauteur du ballon est $h(t) = -4.9t^2 + 14t + 1$.

Méthode 1 : Tracer la tangente

La pente d'une tangente en un point d'un graphique équivaut au taux de variation instantané d'une fonction en ce point.

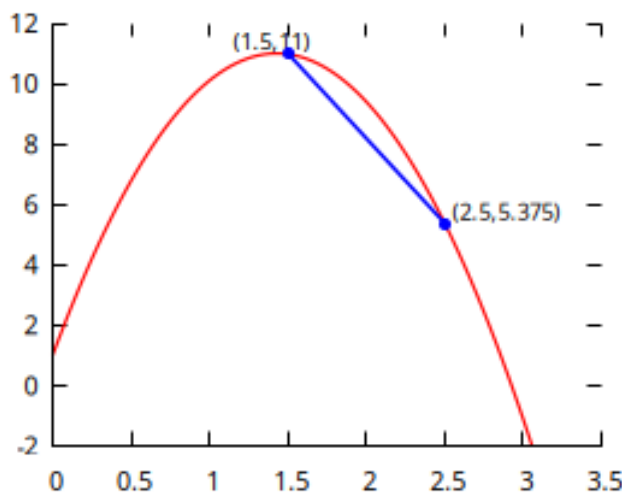


$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=2} \approx \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - 4}{3.5 - 3} = -6 \text{ m/s}$$

Méthode 2 : Choisir un intervalle englobant

Choisir un intervalle qui a comme point milieu l'emplacement du taux de variation instantané, si possible.

Pour cet exemple, choisir l'intervalle $[1.5, 2.5]$. Utiliser l'équation de la fonction pour déterminer les valeurs de y correspondantes.



$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=2} \approx \frac{h(2.5) - h(1.5)}{2.5 - 1.5} = \frac{5.375 - 11}{1} = -5.625 \text{ m/s}$$

Méthode 3 : Faire la moyenne d'un intervalle précédent et suivant

Calculer le taux de variation moyen de chaque côté de $t = 2$ puis en faire la moyenne.

Pour cet exemple, trouver le taux de variation moyen pour les intervalles $[1.5, 2]$ et $[2, 2.5]$ puis en faire la moyenne.

Taux moyen pour l'intervalle $[1.5, 2]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{h(2) - h(1.5)}{2 - 1.5} \\ &= \frac{9.4 - 11}{0.5} \\ &= -3.2 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Taux moyen pour l'intervalle $[2, 2.5]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{h(2.5) - h(2)}{2.5 - 2} \\ &= \frac{5.375 - 9.4}{0.5} \\ &= -8.05 \text{ m/s} \end{aligned}$$

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{t=2} \approx \frac{-3.2 + (-8.05)}{2} = -5.625 \text{ m/s}$$

Exemple 3 : Considérer les données de la Banque du Canada pour le début du mois de novembre 2007. Estimer le taux de variation instantané de la valeur du dollar canadien le 7^e novembre.

Jour	1	2	5	7	8	13	14
Valeur du dollar canadien en cents américains	94.99	93.59	93.39	91.70	93.06	96.43	96.07

Méthode 1 : Choisir un intervalle englobant

Utiliser l'intervalle $[5, 8]$

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=7} \approx \frac{V(8) - V(5)}{8 - 5} = \frac{93.06 - 93.39}{3} = -0.11 \text{ cents/jour}$$

Méthode 2 : Faire la moyenne d'un intervalle précédent et suivant (plus précis)

Taux moyen pour l'intervalle $[5, 7]$

$$\begin{aligned} m &= \frac{V(7) - V(5)}{7 - 5} \\ &= \frac{91.70 - 93.39}{2} \\ &= -0.845 \text{ cents/jour} \end{aligned}$$

Taux moyen pour l'intervalle $[7, 8]$

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{V(8) - V(7)}{8 - 7} \\
 &= \frac{93.06 - 91.70}{1} \\
 &= 1.36 \text{ cents/jour} \\
 \left. \frac{dV}{dt} \right|_{t=7} &\approx \frac{-0.845 + 1.36}{2} = 0.258 \text{ cents/jour}
 \end{aligned}$$

Partie 3 : Déterminer le taux de variation instantané à partir d'une équation

Resserrer un intervalle précédent ou suivant est une technique permettant d'estimer les taux de variation instantanés. En trouvant des taux de variation moyens qui deviennent progressivement plus petits, on peut obtenir des estimations plus précises de ce vers quoi le taux de variation **S'APPROCHE** en un point précis.

Exemple 4 : Utiliser le tableau ci-dessous pour estimer la pente de la tangente à la courbe $f(x) = 2x^3 - x$ à $x = 2$.

Intervalle	Δy	Δx	Pente de la sécante $= \frac{\Delta y}{\Delta x}$
$2 \leq x \leq 3$	$= f(3) - f(2)$ $= [2(3)^3 - 3] - [2(2)^3 - 2]$ $= 51 - 14$ $= 37$	$= 3 - 2$ $= 1$	$= \frac{37}{1}$ $= 37$
$2 \leq x \leq 2.5$	$= f(2.5) - f(2)$ $= 28.75 - 14$ $= 14.75$	$= 2.5 - 2$ $= 0.5$	$= \frac{14.75}{0.5}$ $= 29.5$
$2 \leq x \leq 2.1$	$= f(2.1) - f(2)$ $= 16.422 - 14$ $= 2.422$	$= 2.1 - 2$ $= 0.1$	$= \frac{2.422}{0.1}$ $= 24.22$
$2 \leq x \leq 2.01$	$= f(2.01) - f(2)$ $= 14.231202 - 14$ $= 0.231202$	$= 2.01 - 2$ $= 0.01$	$= \frac{0.231202}{0.01}$ $= 23.1202$
$2 \leq x \leq 2.001$	$= f(2.001) - f(2)$ $= 14.023012 - 14$ $= 0.023012$	$= 2.001 - 2$ $= 0.001$	$= \frac{0.023012}{0.001}$ $= 23.012$

En observant la **limite** des pentes des sécantes lorsqu'on **s'approche** de $x = 2$, on peut estimer la pente de la tangente à :

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} \approx 23$$