

5.3 Formules des angles doubles – Feuille de travail avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

1) Exprimer chacune des expressions suivantes comme un seul rapport trigonométrique.

a) $2 \sin(5x) \cos(5x)$ = $\sin[2(5x)]$ = $\sin(10x)$	b) $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$ = $\cos(2\theta)$	c) $1 - 2 \sin^2(3x)$ = $\cos[2(3x)]$ = $\cos(6x)$
d) $\frac{2 \tan(4x)}{1 - \tan^2(4x)}$ = $\tan[2(4x)]$ = $\tan(8x)$	e) $4 \sin \theta \cos \theta$ = $2 \times 2 \sin \theta \cos \theta$ = $2 \sin(2\theta)$	f) $2 \cos^2 \frac{\theta}{2} - 1$ = $\cos\left[2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$ = $\cos \theta$

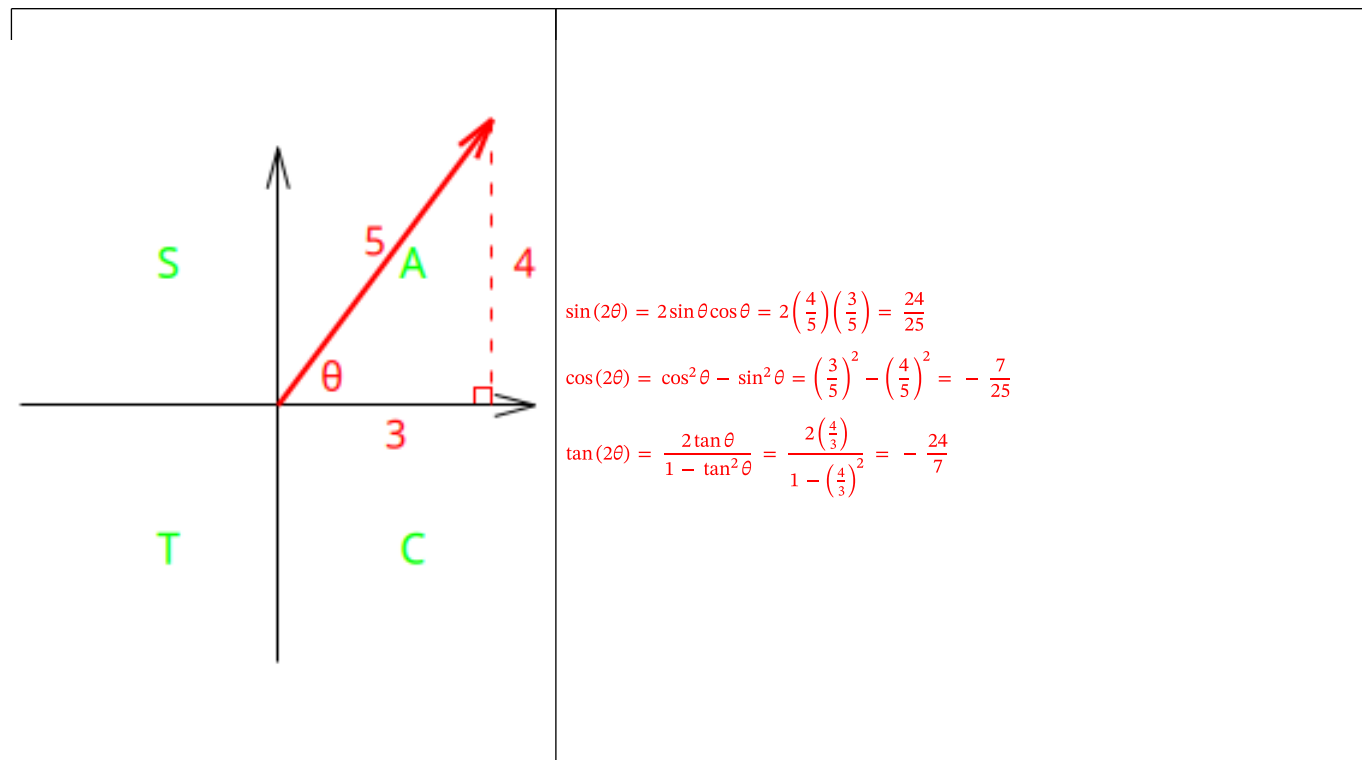
2) Exprimer chacune des expressions suivantes comme un seul rapport trigonométrique, puis évaluer

a) $2 \sin 45^\circ \cos 45^\circ$ = $\sin[2(45^\circ)]$ = $\sin(90^\circ)$ = 1	b) $\cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ$ = $\cos[2(30^\circ)]$ = $\cos(60^\circ)$ = $\frac{1}{2}$	c) $2 \sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12}$ = $\sin\left[2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$ = $\sin \frac{\pi}{6}$ = $\frac{1}{2}$
d) $\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12}$ = $\cos\left[2\left(\frac{\pi}{12}\right)\right]$ = $\cos \frac{\pi}{6}$ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$	e) $1 - 2 \sin^2 \frac{3\pi}{8}$ = $\cos\left[2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]$ = $\cos \frac{3\pi}{4}$ = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$	f) $2 \tan 60^\circ \cos^2 60^\circ$ = $2 \left(\frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ}\right) \cos^2 60^\circ$ = $2 \sin 60^\circ \cos 60^\circ = \sin[2(60^\circ)]$ = $\sin(120^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

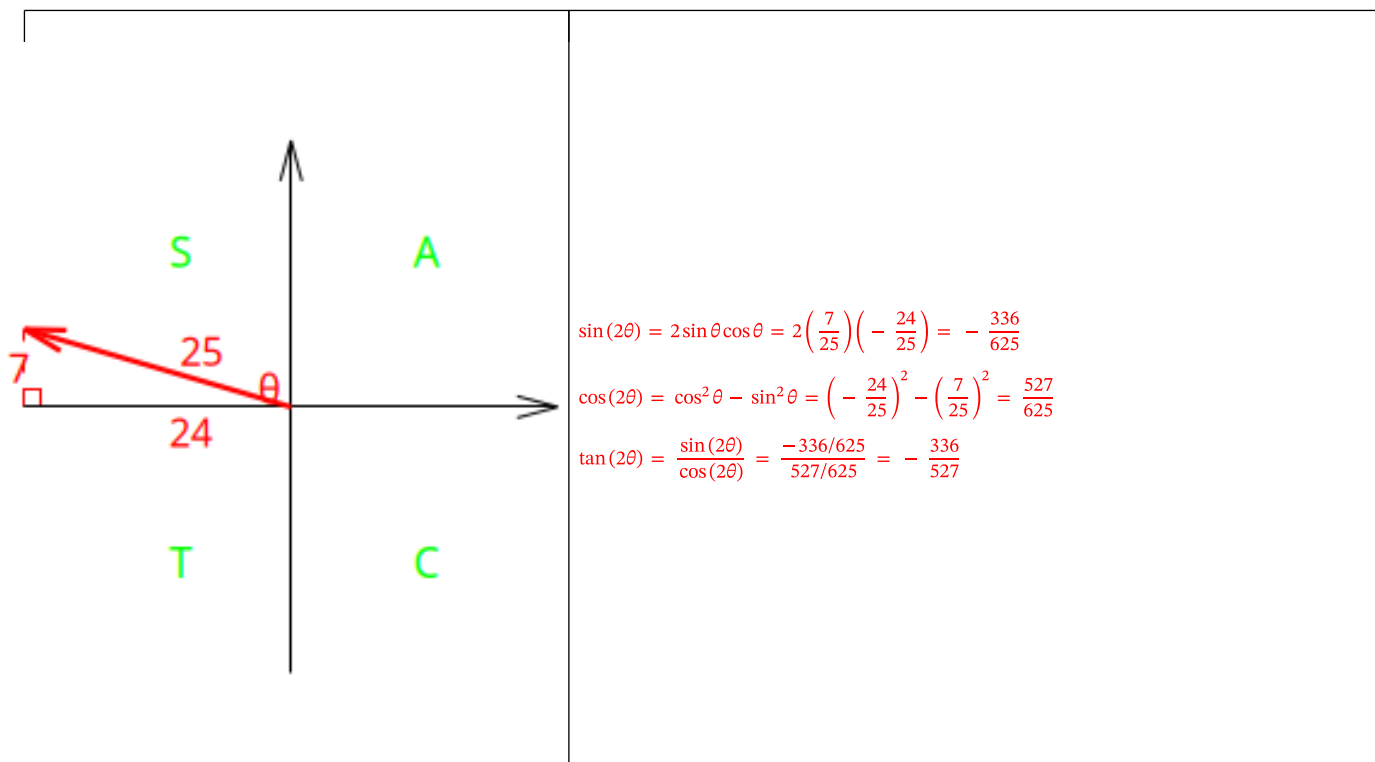
3) Utiliser une formule de l'angle double pour réécrire chaque rapport trigonométrique

a) $\sin(4\theta)$ = $\sin[2(2\theta)]$ = $2 \sin(2\theta) \cos(2\theta)$	b) $\cos(3x)$ = $\cos\left[2\left(\frac{3}{2}x\right)\right]$ = $\cos^2\left(\frac{3}{2}x\right) - \sin^2\left(\frac{3}{2}x\right)$	c) $\tan x$ = $\tan\left[2\left(\frac{1}{2}x\right)\right]$ = $\frac{2 \tan(\frac{1}{2}x)}{1 - \tan^2(\frac{1}{2}x)}$
d) $\cos(6\theta)$ = $\cos[2(3\theta)]$ = $\cos^2(3\theta) - \sin^2(3\theta)$	e) $\sin x$ = $\sin\left[2\left(\frac{1}{2}x\right)\right]$ = $2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$	f) $\tan(5\theta)$ = $\tan\left[2\left(\frac{5}{2}\theta\right)\right]$ = $\frac{2 \tan(\frac{5}{2}\theta)}{1 - \tan^2(\frac{5}{2}\theta)}$

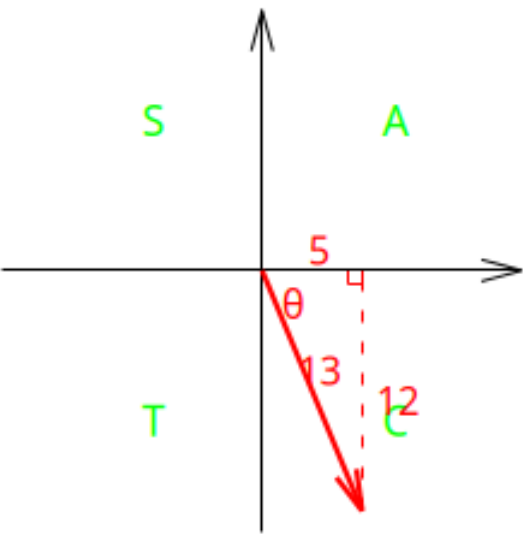
4) Déterminer les valeurs de $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, et $\tan 2\theta$, sachant que $\cos \theta = \frac{3}{5}$ et $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



5) Déterminer les valeurs de $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, et $\tan 2\theta$, sachant que $\tan \theta = -\frac{7}{24}$ et $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$



6) Déterminer les valeurs de $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, et $\tan 2\theta$, sachant que $\sin \theta = -\frac{12}{13}$ et $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$

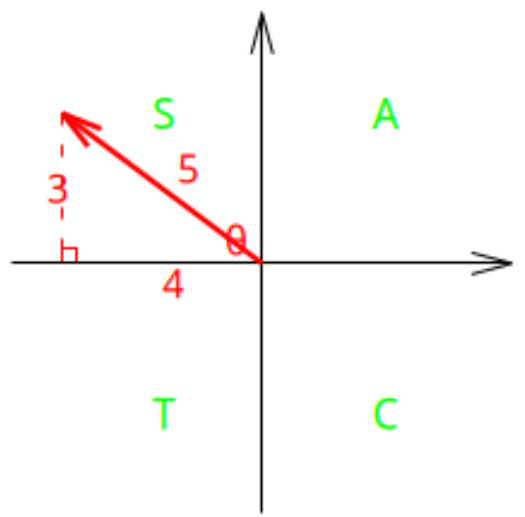


$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \left(-\frac{12}{13} \right) \left(\frac{5}{13} \right) = -\frac{120}{169}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(\frac{5}{13} \right)^2 - \left(-\frac{12}{13} \right)^2 = -\frac{119}{169}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{-120/169}{-119/169} = \frac{120}{119}$$

7) Déterminer les valeurs de $\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$, et $\tan 2\theta$, sachant que $\cos \theta = -\frac{4}{5}$ et $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$



$$\sin(2\theta) = 2 \sin \theta \cos \theta = 2 \left(\frac{3}{5} \right) \left(-\frac{4}{5} \right) = -\frac{24}{25}$$

$$\cos(2\theta) = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \left(-\frac{4}{5} \right)^2 - \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{7}{25}$$

$$\tan(2\theta) = \frac{\sin(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{-24/25}{7/25} = -\frac{24}{7}$$

8) Déterminer la valeur de a dans l'équation $2 \tan x - \tan(2x) + 2a = 1 - \tan(2x) \tan^2 x$

$$2 \tan x + 2a - 1 = \tan(2x) - \tan(2x) \tan^2 x$$

$$2 \tan x + 2a - 1 = \tan(2x) (1 - \tan^2 x)$$

$$2 \tan x + 2a - 1 = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} (1 - \tan^2 x)$$

$$2 \tan x + 2a - 1 = 2 \tan x$$

$$2a - 1 = 0$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Corrigé

1) a) $\sin(10x)$ b) $\cos(2\theta)$ c) $\cos(6x)$ d) $\tan(8x)$ e) $2\sin(2\theta)$ f) $\cos\theta$

2) a) $\sin 90^\circ; 1$ b) $\cos 60^\circ; \frac{1}{2}$ c) $\sin \frac{\pi}{6}; \frac{1}{2}$ d) $\cos \frac{\pi}{6}; \frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\cos \frac{3\pi}{4}; -\frac{1}{\sqrt{2}}$ f) $\sin 120^\circ; \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) a) $2\sin(2\theta)\cos(2\theta)$ b) $2\cos^2(1.5x) - 1$ c) $\frac{2\tan(0.5x)}{1 - \tan^2(0.5x)}$ d) $\cos^2(3\theta) - \sin^2(3\theta)$ e) $2\sin(0.5x)\cos(0.5x)$ f) $\frac{2\tan(2.5\theta)}{1 - \tan^2(2.5\theta)}$

4) $\sin(2\theta) = \frac{24}{25}$, $\cos(2\theta) = -\frac{7}{25}$, $\tan(2\theta) = -\frac{24}{7}$

5) $\sin(2\theta) = -\frac{336}{625}$, $\cos(2\theta) = \frac{527}{625}$, $\tan(2\theta) = -\frac{336}{527}$

6) $\sin(2\theta) = -\frac{120}{169}$, $\cos(2\theta) = -\frac{119}{169}$, $\tan(2\theta) = \frac{120}{119}$

7) $\sin(2\theta) = -\frac{24}{25}$, $\cos(2\theta) = \frac{7}{25}$, $\tan(2\theta) = -\frac{24}{7}$

8) $a = \frac{1}{2}$