

5.2 Formules des angles composés – Feuille de travail avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

1) Utiliser une formule des angles composés appropriée pour exprimer comme une seule fonction trigonométrique, puis déterminer une valeur exacte pour chacune

a) $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}$ $= \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \right)$ $= \sin \left(\frac{3\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right)$ $= \sin \frac{4\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{3}$ $= \frac{\sqrt{3}}{2}$	b) $\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}$ $= \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \right)$ $= \sin \left(\frac{3\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \right)$ $= \sin \frac{2\pi}{12} = \sin \frac{\pi}{6}$ $= \frac{1}{2}$
c) $\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}$ $= \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \right)$ $= \cos \left(\frac{3\pi}{12} + \frac{\pi}{12} \right)$ $= \cos \frac{4\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{3}$ $= \frac{1}{2}$	d) $\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} + \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}$ $= \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} \right)$ $= \cos \left(\frac{3\pi}{12} - \frac{\pi}{12} \right)$ $= \cos \frac{2\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6}$ $= \frac{\sqrt{3}}{2}$
e) $\cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18} - \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{5\pi}{18}$ $= \cos \left(\frac{2\pi}{9} + \frac{5\pi}{18} \right)$ $= \cos \left(\frac{4\pi}{18} + \frac{5\pi}{18} \right)$ $= \cos \frac{9\pi}{18} = \cos \frac{\pi}{2}$ $= 0$	f) $\cos \frac{10\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18} + \sin \frac{10\pi}{9} \sin \frac{5\pi}{18}$ $= \cos \left(\frac{10\pi}{9} - \frac{5\pi}{18} \right)$ $= \cos \left(\frac{20\pi}{18} - \frac{5\pi}{18} \right)$ $= \cos \frac{15\pi}{18} = \cos \frac{5\pi}{6}$ $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) Appliquer une formule des angles composés, puis déterminer une valeur exacte pour chacune.

a) $\sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$ $= \sin \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$ $= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ $= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$ $= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$	b) $\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right)$ $= \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{3} \sin \frac{\pi}{4}$ $= \left(\frac{1}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ $= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4}$ $= \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$
---	---

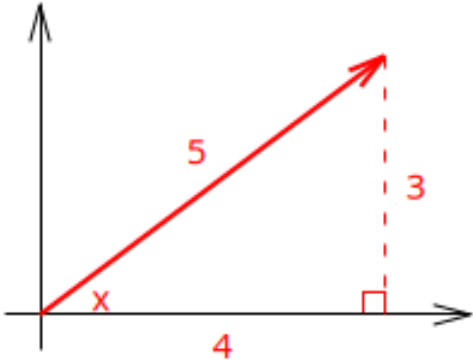
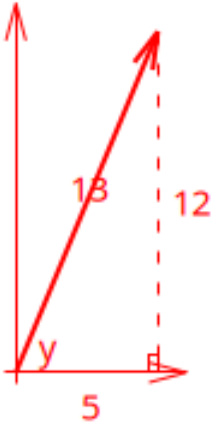
c) $\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ $= \cos\frac{2\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{2\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4}$ $= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $= -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$ $= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$	d) $\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$ $= \sin\frac{2\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{2\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4}$ $= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}$ $= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
e) $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)$ $= \frac{\tan\frac{\pi}{4} + \tan\pi}{1 - \tan\frac{\pi}{4} \tan\pi}$ $= \frac{1 + 0}{1 - 1(0)}$ $= 1$	f) $\tan\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$ $= \frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{3} \tan\frac{\pi}{6}}$ $= \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}$ $= \frac{\frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2}$ $= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

4) Utiliser une formule des angles composés appropriée pour déterminer une valeur exacte pour chacune.

a) $\sin\frac{7\pi}{12}$ $= \sin\left(\frac{3\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ $= \sin\frac{\pi}{4} \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4} \sin\frac{\pi}{3}$ $= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$	b) $\sin\frac{5\pi}{12}$ $= \sin\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$ $= \sin\frac{\pi}{6} \cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6} \sin\frac{\pi}{4}$ $= \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
c) $\cos\frac{11\pi}{12}$ $= \cos\left(\frac{8\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ $= \cos\frac{2\pi}{3} \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{2\pi}{3} \sin\frac{\pi}{4}$ $= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $= -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$	d) $\cos\frac{5\pi}{12}$ $= \cos\left(\frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$ $= \cos\frac{\pi}{6} \cos\frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{6} \sin\frac{\pi}{4}$ $= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ $= \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
e) $\sin\frac{13\pi}{12}$ $= \sin\left(\frac{9\pi}{12} + \frac{4\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$ $= \sin\frac{3\pi}{4} \cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{3\pi}{4} \sin\frac{\pi}{3}$ $= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ $= \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$	f) $\cos\frac{17\pi}{12}$ $= \cos\left(\frac{15\pi}{12} + \frac{2\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$ $= \cos\frac{5\pi}{4} \cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{5\pi}{4} \sin\frac{\pi}{6}$ $= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$ $= -\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

g) $\sin \frac{19\pi}{12}$ $= \sin \left(\frac{15\pi}{12} + \frac{4\pi}{12} \right) = \sin \left(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right)$ $= \sin \frac{5\pi}{4} \cos \frac{\pi}{3} + \cos \frac{5\pi}{4} \sin \frac{\pi}{3}$ $= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ $= -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$	h) $\cos \frac{23\pi}{12}$ $= \cos \left(\frac{15\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \right) = \cos \left(\frac{5\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right)$ $= \cos \frac{5\pi}{4} \cos \frac{2\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{4} \sin \frac{2\pi}{3}$ $= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(-\frac{1}{2} \right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ $= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$
---	---

5) Les angles x et y sont situés dans le premier quadrant tels que $\sin x = \frac{3}{5}$ et $\cos y = \frac{5}{13}$. Déterminer les valeurs exactes de $\cos x$ et $\sin y$.

 $\cos x = \frac{4}{5}$	 $\sin y = \frac{12}{13}$
---	---

6) Se référer à la question précédente. Déterminer une valeur exacte pour chacune des suivantes.

a) $\sin(x + y)$ $= \sin x \cos y + \cos x \sin y$ $= \left(\frac{3}{5} \right) \left(\frac{5}{13} \right) + \left(\frac{4}{5} \right) \left(\frac{12}{13} \right)$ $= \frac{15}{65} + \frac{48}{65}$ $= \frac{63}{65}$	b) $\sin(x - y)$ $= \sin x \cos y - \cos x \sin y$ $= \left(\frac{3}{5} \right) \left(\frac{5}{13} \right) - \left(\frac{4}{5} \right) \left(\frac{12}{13} \right)$ $= \frac{15}{65} - \frac{48}{65}$ $= -\frac{33}{65}$
c) $\cos(x + y)$ $= \cos x \cos y - \sin x \sin y$ $= \left(\frac{4}{5} \right) \left(\frac{5}{13} \right) - \left(\frac{3}{5} \right) \left(\frac{12}{13} \right)$ $= \frac{20}{65} - \frac{36}{65}$ $= -\frac{16}{65}$	d) $\cos(x - y)$ $= \cos x \cos y + \sin x \sin y$ $= \left(\frac{4}{5} \right) \left(\frac{5}{13} \right) + \left(\frac{3}{5} \right) \left(\frac{12}{13} \right)$ $= \frac{20}{65} + \frac{36}{65}$ $= \frac{56}{65}$

7) Utiliser une formule des angles composés pour montrer que $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

MG	MD
$\begin{aligned} &= \cos(2x) \\ &= \cos(x + x) \\ &= \cos x \cos x - \sin x \sin x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \end{aligned}$	$= \cos^2 x - \sin^2 x$

MG = MD

Corrigé

- 1) a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) 0 f) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 3) a) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ c) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ e) 1 f) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
- 4) a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$ c) $\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ e) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ f) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ g) $\frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ h) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$
- 5) $\cos x = \frac{4}{5}$, $\sin y = \frac{12}{13}$
- 6) a) $\frac{63}{65}$ b) $-\frac{33}{65}$ c) $-\frac{16}{65}$ d) $\frac{56}{65}$