

5.1 Identités de cofonction – Feuille de travail avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

1) Simplifier.

a) $\sin x \left(\frac{1}{\cos x} \right)$ $= \frac{\sin x}{\cos x}$ $= \tan x$	b) $(\cos x)(\sec x)$ $= \cos x \left(\frac{1}{\cos x} \right)$ $= 1$
c) $1 - \cos^2 x$ $= \sin^2 x$	d) $1 - \sin^2 x$ $= \cos^2 x$
e) $\frac{\tan x}{\sin x}$ $= \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\sin x}$ $= \frac{1}{\cos x}$ $= \sec x$	f) $(1 - \sin x)(1 + \sin x)$ $= 1 - \sin^2 x$ $= \cos^2 x$
g) $\left(\frac{1}{\tan x} \right) \sin x$ $= \frac{\cos x}{\sin x} (\sin x)$ $= \cos x$	h) $\frac{1 + \tan^2 x}{\tan^2 x}$ $= \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x}$ $= \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$ $= \frac{1}{\sin^2 x}$ $= \csc^2 x$
i) $\frac{\sin x \cos x}{1 - \sin^2 x}$ $= \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x}$ $= \frac{\sin x}{\cos x}$ $= \tan x$	j) $\frac{1 - \cos^2 x}{\sin x \cos x}$ $= \frac{\sin^2 x}{\sin x \cos x}$ $= \frac{\sin x}{\cos x}$ $= \tan x$

2) Prouver les identités suivantes.

a) $\sin^2 x (1 + \cot^2 x) = 1$

MG	MD
$= \sin^2 x (1 + \cot^2 x)$ $= \sin^2 x \left(1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \right)$ $= \sin^2 x + \cos^2 x$ $= 1$	$= 1$

MG = MD

b) $1 - \cos^2 x = \tan x \cos x \sin x$

MG	MD
$= 1 - \cos^2 x$ $= \sin^2 x$	$= \tan x \cos x \sin x$ $= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) (\cos x) (\sin x)$ $= \sin^2 x$

MG = MD

c) $\cos x \tan^3 x = \sin x \tan^2 x$

MG	MD
$= \cos x \tan^3 x$ $= \cos x \left(\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} \right)$ $= \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$	$= \sin x \tan^2 x$ $= \sin x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right)$ $= \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$

MG = MD

d) $1 - 2\cos^2 \theta = \sin^4 \theta - \cos^4 \theta$

MG	MD
$= 1 - 2\cos^2 \theta$	$= (\sin^2 \theta)^2 - (\cos^2 \theta)^2$ $= (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)$ $= (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta)(1)$ $= (1 - \cos^2 \theta) - \cos^2 \theta$ $= 1 - 2\cos^2 \theta$

MG = MD

e) $\cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \csc x$

MG	MD
$= \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ $= \frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin^2 x}{(1 + \cos x)(\sin x)}$ $= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)(\sin x)}$ $= \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)(\sin x)}$ $= \frac{1}{\sin x}$	$= \csc x$ $= \frac{1}{\sin x}$

MG = MD

f) $\frac{\sec x}{\sin x} + \frac{\csc x}{\cos x} = \frac{2}{\sin x \cos x}$

MG	MD
$= \frac{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{\sin x} + \frac{\left(\frac{1}{\sin x}\right)}{\cos x}$ $= \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x}$ $= \frac{2}{\sin x \cos x}$	$= \frac{2}{\sin x \cos x}$

MG = MD

g) $\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin x \cos x} = 1 - \tan x$

MG	MD
$= \frac{(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)}{\cos x(\cos x + \sin x)}$ $= \frac{\cos x - \sin x}{\cos x}$	$= 1 - \tan x$ $= \frac{\cos x}{\cos x} - \frac{\sin x}{\cos x}$ $= \frac{\cos x - \sin x}{\cos x}$

MG = MD

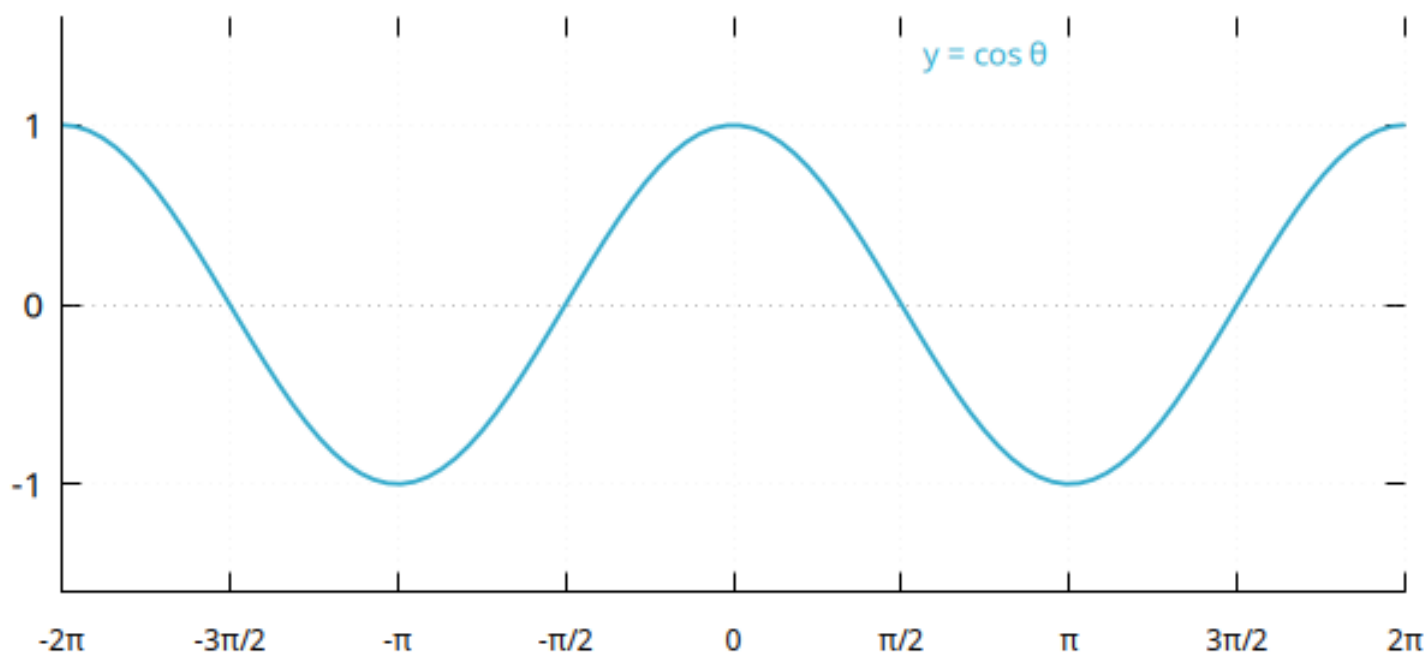
h) $\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x} = 2 \csc^2 x$

MG	MD
$= \frac{1 - \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} + \frac{1 + \cos x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$ $= \frac{1 - \cos x + 1 + \cos x}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}$ $= \frac{2}{1 - \cos^2 x}$ $= \frac{2}{\sin^2 x}$	$= 2 \csc^2 x$ $= 2 \left(\frac{1}{\sin^2 x} \right)$ $= \frac{2}{\sin^2 x}$

MG = MD

3)

a) Utiliser des transformations et la fonction cosinus pour écrire trois expressions équivalentes pour le graphique suivant :



1. $y = \cos \theta$

2. $y = \cos(\theta - 2\pi)$

3. $y = \cos(\theta + 2\pi)$

b) Transformer vos 3 équations de la partie a) pour écrire l'équation de 3 fonctions sinus qui représentent le graphique.

1. $y = \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$

2. $y = \sin\left(\theta - 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$

3. $y = \sin\left(\theta + 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\theta + \frac{5\pi}{2}\right)$

4) Utiliser les identités de cofonction pour écrire une expression équivalente à chacune des expressions suivantes.

a) $\sin \frac{\pi}{6}$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \cos \left(\frac{3\pi}{6} - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \cos \left(\frac{2\pi}{6} \right)$$

$$= \cos \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

b) $\cos \frac{5\pi}{12}$

$$= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$= \sin \left(\frac{6\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right)$$

$$= \sin \left(\frac{\pi}{12} \right)$$

c) $\cos \frac{5\pi}{16}$

$$= \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{16} \right)$$

$$= \sin \left(\frac{8\pi}{16} - \frac{5\pi}{16} \right)$$

$$= \sin \left(\frac{3\pi}{16} \right)$$

5) Écrire une expression équivalente à chacune des expressions suivantes, en utilisant l'angle aigu associé.

a) $\sin \frac{7\pi}{8}$

$\frac{7\pi}{8}$ se trouve au quadrant II, où le sinus est positif, avec un angle de référence de $\frac{\pi}{8}$.

$$\sin \frac{7\pi}{8} = \sin \frac{\pi}{8}$$

b) $\cos \frac{13\pi}{12}$

$\frac{13\pi}{12}$ se trouve au quadrant III, où le cosinus est négatif, avec un angle de référence de $\frac{\pi}{12}$.

$$\cos \frac{13\pi}{12} = -\cos \frac{\pi}{12}$$

c) $\cos \frac{11\pi}{6}$

$\frac{11\pi}{6}$ se trouve au quadrant IV, où le cosinus est positif, avec un angle de référence de $\frac{\pi}{6}$.

$$\cos \frac{11\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6}$$

6) Sachant que $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, utiliser une expression trigonométrique équivalente pour montrer que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$$\cos \frac{\pi}{3} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \sin \left(\frac{\pi}{6} \right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

7) Sachant que $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, utiliser une expression trigonométrique équivalente pour montrer que $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

$$\cos \frac{2\pi}{3} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= \sin \left(\frac{3\pi}{6} - \frac{4\pi}{6} \right)$$

$$= \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right)$$

$$= -\sin \frac{\pi}{6}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

8) Sachant que $\csc \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$, utiliser une expression trigonométrique équivalente pour montrer que $\sec \frac{3\pi}{4} = -\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\sec \frac{3\pi}{4} &= \frac{1}{\cos \frac{3\pi}{4}} \\&= \frac{1}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} \right)} \\&= \frac{1}{\sin \left(-\frac{\pi}{4} \right)} \\&= \frac{1}{-\sin \frac{\pi}{4}} \\&= -\csc \frac{\pi}{4} \\&= -\sqrt{2}\end{aligned}$$

9) Sachant que $\cos \frac{3\pi}{11} \approx 0.6549$, utiliser des expressions trigonométriques équivalentes pour évaluer ce qui suit, à quatre décimales.

$$\begin{aligned}\text{a) } \sin \frac{5\pi}{22} &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{5\pi}{22} \right) \\&= \cos \left(\frac{11\pi}{22} - \frac{5\pi}{22} \right) \\&= \cos \left(\frac{6\pi}{22} \right) \\&= \cos \left(\frac{3\pi}{11} \right) \\&\approx 0.6549\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b) } \sin \frac{17\pi}{22} &= \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{17\pi}{22} \right) \\&= \cos \left(\frac{11\pi}{22} - \frac{17\pi}{22} \right) \\&= \cos \left(-\frac{6\pi}{22} \right) \\&= \cos \left(\frac{3\pi}{11} \right) \\&\approx 0.6549\end{aligned}$$

Corrigé

1) a) $\tan x$ b) 1 c) $\sin^2 x$ d) $\cos^2 x$ e) $\sec x$ f) $\cos^2 x$ g) $\cos x$ h) $\csc^2 x$ i) $\tan x$ j) $\tan x$

3) Les réponses peuvent varier, mais voici des solutions possibles :

$$\text{a) } y = \cos(\theta + 2\pi), y = \cos(\theta - 2\pi), y = \cos(\theta - 4\pi)$$

$$\text{b) } y = \sin\left(\theta + \frac{5\pi}{2}\right), y = \sin\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right), y = \sin\left(\theta - \frac{7\pi}{2}\right)$$

$$\text{4) a) } \cos \frac{\pi}{3} \text{ b) } \sin \frac{\pi}{12} \text{ c) } \sin \frac{3\pi}{16}$$

$$\text{5) a) } \sin \frac{\pi}{8} \text{ b) } -\cos \frac{\pi}{12} \text{ c) } \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\text{9) a) } \sin \frac{5\pi}{22} = \cos \frac{3\pi}{11} \approx 0.6549 \text{ b) } \sin \frac{17\pi}{22} = \cos \left(-\frac{3\pi}{11} \right) = \cos \frac{3\pi}{11} \approx 0.6549$$