

5.7 Résoudre des équations trigonométriques quadratiques – Leçon avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Une équation trigonométrique quadratique peut avoir plusieurs solutions dans l'intervalle $0 \leq x \leq 2\pi$.

On peut souvent **factoriser** une équation trigonométrique quadratique puis résoudre les deux équations trigonométriques linéaires qui en résultent. Dans les cas où l'équation ne peut être factorisée, utiliser la **formule quadratique** puis résoudre les équations trigonométriques linéaires qui en résultent.

Il peut être nécessaire d'utiliser une identité de Pythagore, une formule d'angle composé, ou une formule d'angle double pour créer une équation quadratique ne contenant qu'une seule fonction trigonométrique dont tous les arguments correspondent.

Rappelons que pour résoudre une équation trigonométrique linéaire, il faut considérer les 3 outils suivants :

1. Triangles spéciaux
2. Graphiques des fonctions trigonométriques
3. Calculatrice

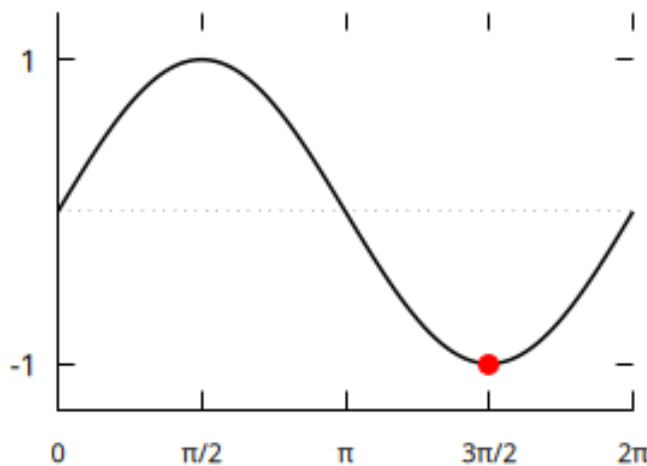
Partie 1 : Résoudre des équations trigonométriques quadratiques

Exemple 1 : Résoudre chacune des équations suivantes pour $0 \leq x \leq 2\pi$

a) $(\sin x + 1)\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0$

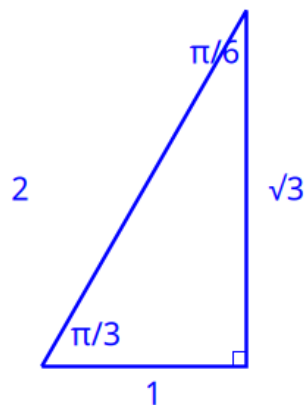
Poser les deux facteurs égaux à zéro et résoudre.

$\sin x + 1 = 0 \rightarrow \sin x = -1 \rightarrow$ Graphique? Oui!

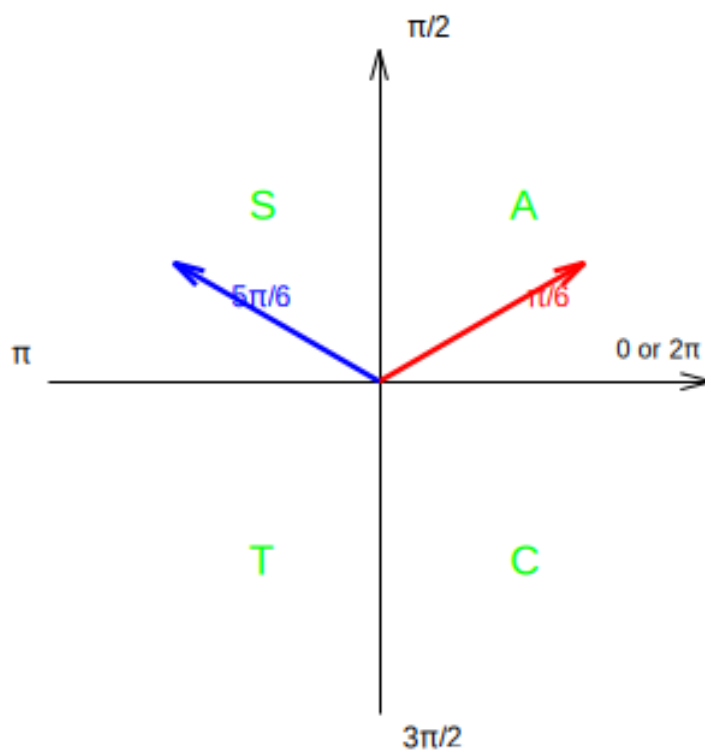


$x_1 = \frac{3\pi}{2}$

$\sin x - \frac{1}{2} = 0 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow$ Graphique? Non $\rightarrow$ Triangle? Oui



$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. Placer aux quadrants 1 et 2.



$$x_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$x_3 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Les solutions sont $x = \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$, ou $\frac{5\pi}{6}$ radians

b) $\sin^2 x - \sin x = 2$

$$\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$$

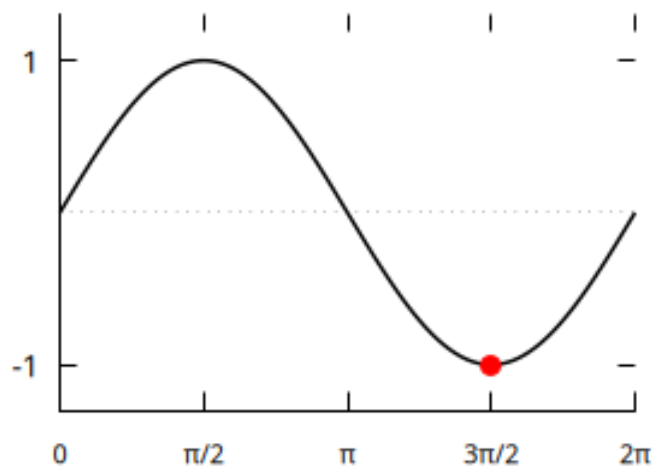
Soit $u = \sin x$, $u^2 - u - 2 = 0$

$$(u - 2)(u + 1) = 0$$

$$(\sin x - 2)(\sin x + 1) = 0$$

$$\sin x - 2 = 0 \rightarrow \sin x = 2 \rightarrow \text{Aucune solution}$$

$$\sin x + 1 = 0 \rightarrow \sin x = -1 \rightarrow \text{Graphique? Oui}$$



$$x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{La seule solution est } x = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{c) } 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$$

$$\text{Soit } x = \sin x, \quad 2x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$2x^2 - 2x - 1x + 1 = 0$$

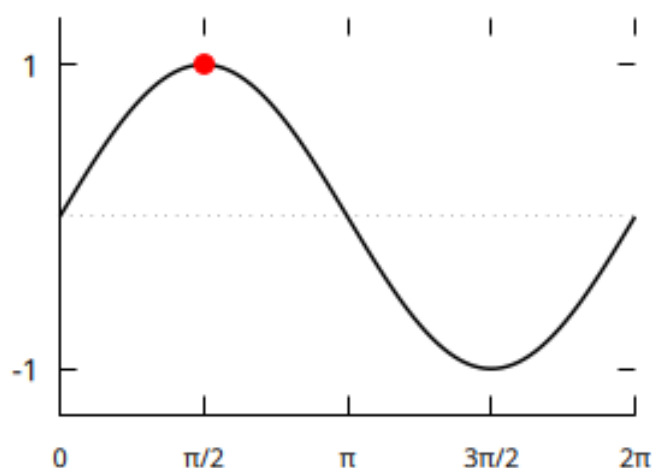
$$(2x^2 - 2x) + (-1x + 1) = 0$$

$$2x(x - 1) - 1(x - 1) = 0$$

$$(x - 1)(2x - 1) = 0$$

$$(\sin x - 1)(2\sin x - 1) = 0$$

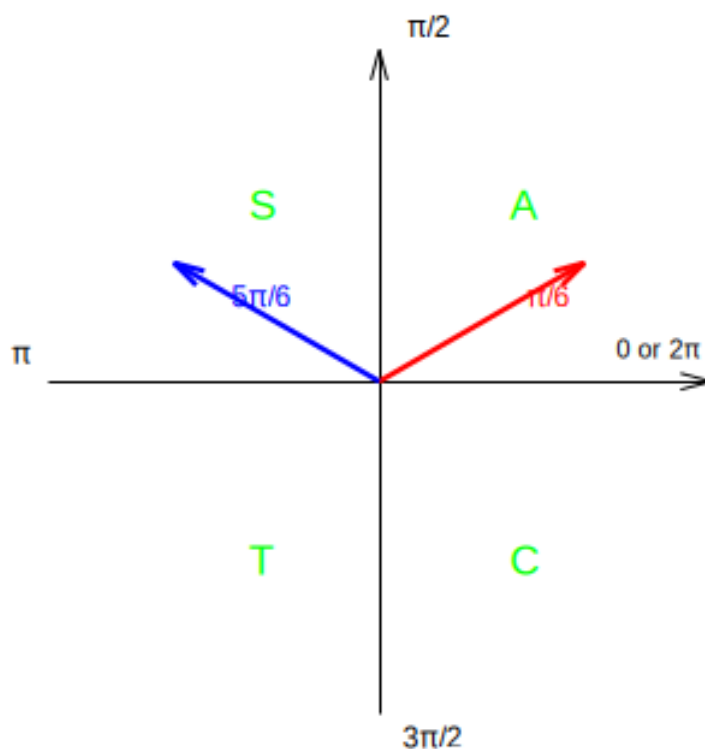
$$\sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = 1 \rightarrow \text{Graphique}$$



$$x_1 = \frac{\pi}{2}$$

$$2\sin x - 1 = 0 \rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{Triangle}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}. \text{ Placer aux quadrants 1 et 2.}$$



$$x_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$x_3 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

Les solutions sont $x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \text{ ou } \frac{5\pi}{6}$

Partie 2 : Utiliser les identités pour résoudre des équations trigonométriques quadratiques

Exemple 2 : Résoudre chacune des équations suivantes pour $0 \leq x \leq 2\pi$

a) $2\sec^2 x - 3 + \tan x = 0$

Identité de Pythagore : $\sec^2 x = \tan^2 x + 1$

$$2(\tan^2 x + 1) - 3 + \tan x = 0$$

$$2\tan^2 x + 2 - 3 + \tan x = 0$$

$$2\tan^2 x + \tan x - 1 = 0$$

Soit $x = \tan x$, $2x^2 + x - 1 = 0$

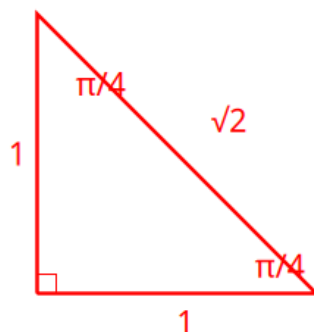
$$2x^2 + 2x - 1x - 1 = 0$$

$$2x(x + 1) - 1(x + 1) = 0$$

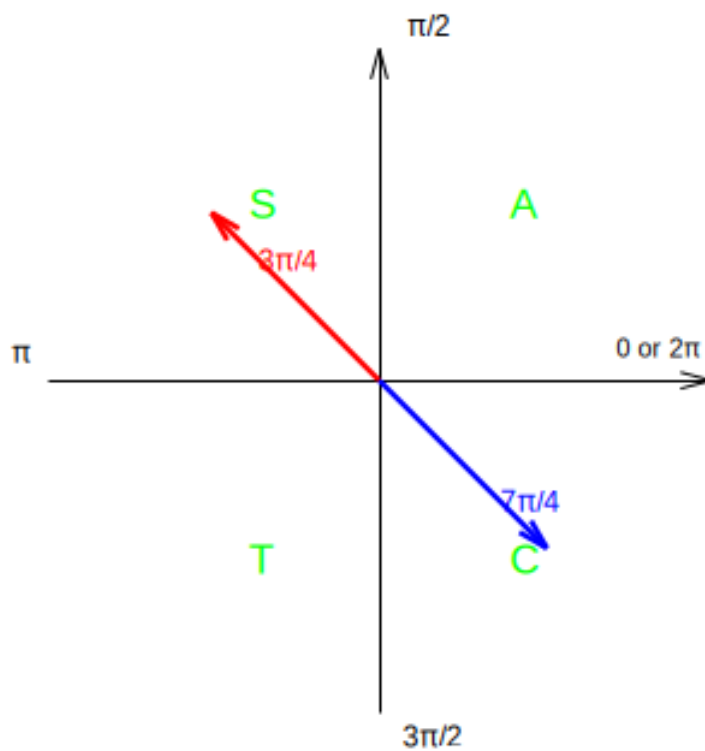
$$(x + 1)(2x - 1) = 0$$

$$(\tan x + 1)(2\tan x - 1) = 0$$

$$\tan x + 1 = 0 \rightarrow \tan x = -1$$



Placer $\frac{\pi}{4}$ aux quadrants 2 et 4.

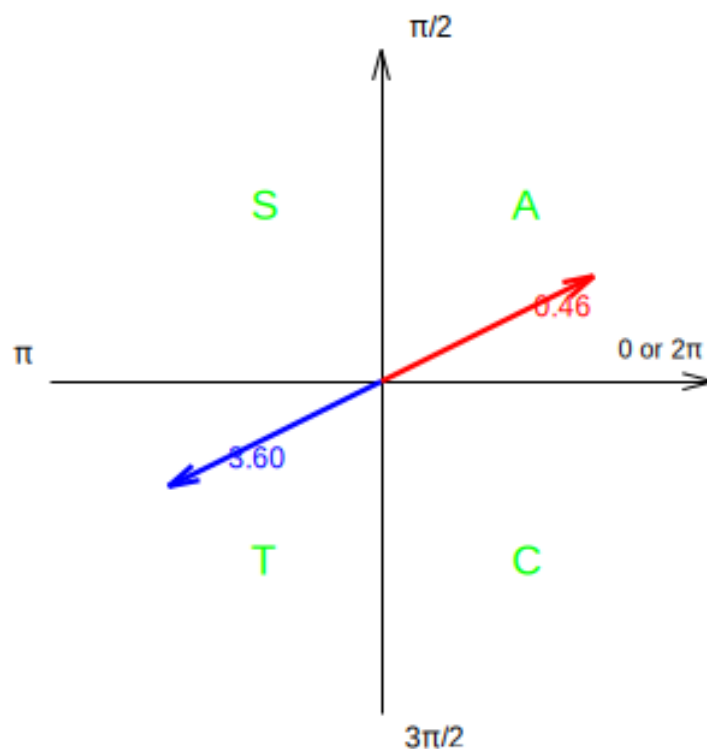


$$x_1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$2 \tan x - 1 = 0 \rightarrow \tan x = \frac{1}{2}$$

$x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0.46$ radians. Placer aux quadrants 1 et 3.



$$x_3 \approx 0.46$$

$$x_4 = \pi + 0.46 \approx 3.60$$

Les solutions sont $x = \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, 0.46$, ou 3.60 radians

b) $3 \sin x + 3 \cos(2x) = 2$

$$3 \sin x + 3(1 - 2 \sin^2 x) = 2$$

$$3 \sin x + 3 - 6 \sin^2 x - 2 = 0$$

$$-6 \sin^2 x + 3 \sin x + 1 = 0$$

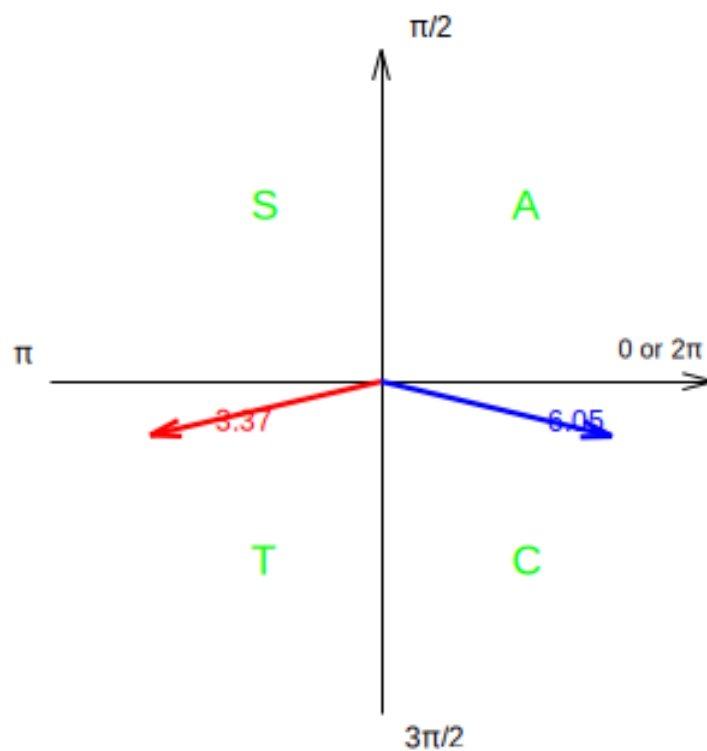
Soit $x = \sin x$, $-6x^2 + 3x + 1 = 0$. Non factorisable, utiliser la formule quadratique.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{(3)^2 - 4(-6)(1)}}{2(-6)}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{-12}$$

$$x \approx -0.23 \text{ ou } x \approx 0.73$$

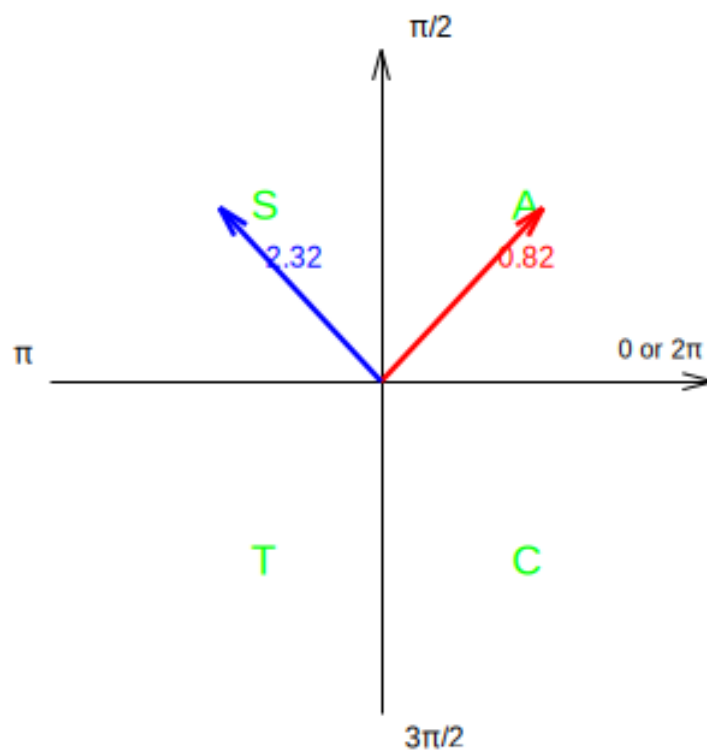
$\sin x = -0.23 \rightarrow x = \sin^{-1}(-0.23)$. Placer aux quadrants 3 et 4.



$$x_1 = 2\pi - 0.23 \approx 6.05$$

$$x_2 = \pi + 0.23 \approx 3.37$$

$\sin x = 0.73 \rightarrow x = \sin^{-1}(0.73)$. Placer aux quadrants 1 et 2.



$$x_3 \approx 0.82$$

$$x_4 = \pi - 0.82 \approx 2.32$$

Les solutions sont $x = 0.82, 2.32, 3.37, \text{ ou } 6.05$ radians