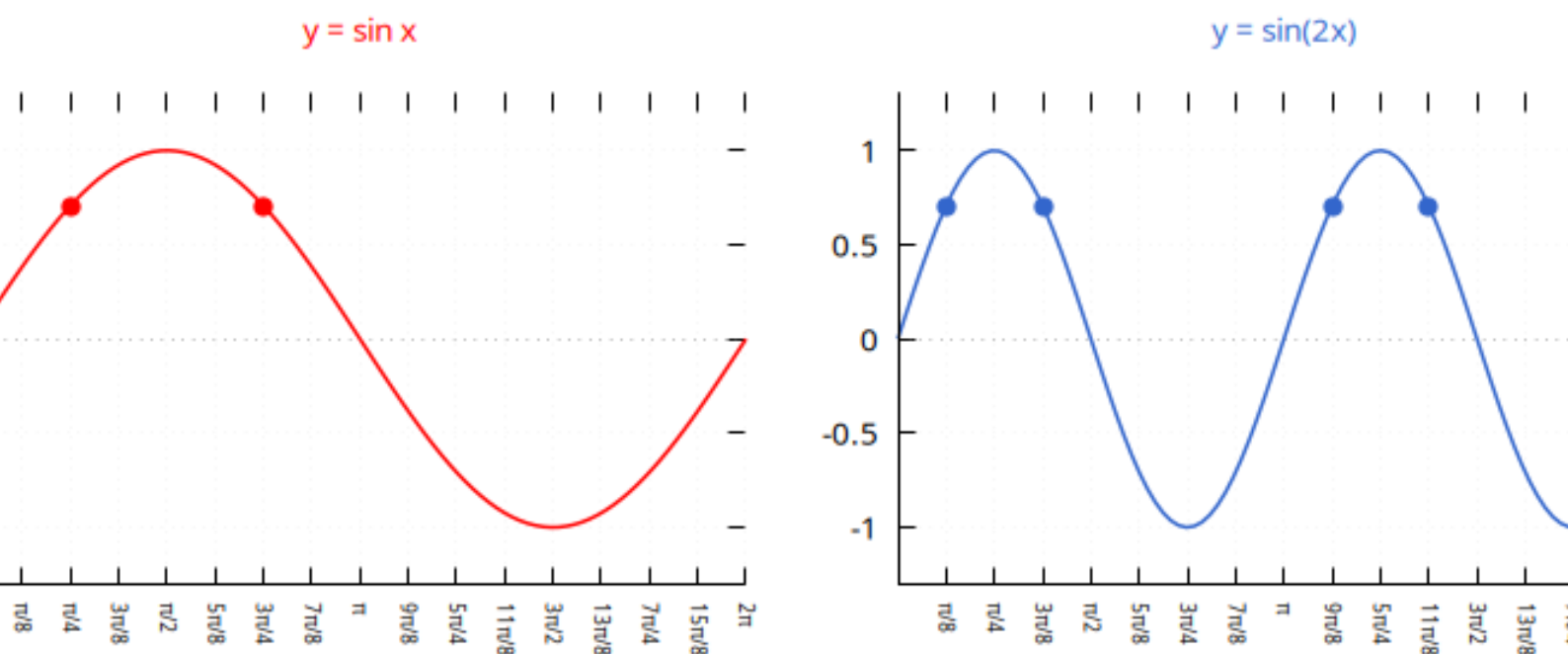


5.6 Résoudre des équations trigonométriques à angle double – Leçon avec solutions

Ce document a été composé et mis en forme par Annie Bernatchez.

Le contenu du cours provient de www.jensenmath.ca

Partie 1 : Investigation



a) Quelle est la période des deux fonctions ci-dessus? Combien de cycles entre 0 et 2π radians?

Pour $y = \sin x \rightarrow \text{période} = 2\pi$

Pour $y = \sin(2x) \rightarrow \text{période} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

b) En regardant le graphique de $y = \sin x$, combien de solutions y a-t-il pour $\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$?

2 solutions

$$\sin \frac{\pi}{4} = \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

c) En regardant le graphique de $y = \sin(2x)$, combien de solutions y a-t-il pour $\sin(2x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.71$?

4 solutions

$$\sin \left[2 \left(\frac{\pi}{8} \right) \right] = \sin \left[2 \left(\frac{3\pi}{8} \right) \right] = \sin \left[2 \left(\frac{9\pi}{8} \right) \right] = \sin \left[2 \left(\frac{11\pi}{8} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

d) Lorsque la période d'une fonction est réduite de moitié, quel est l'effet sur le nombre de solutions entre 0 et 2π radians?

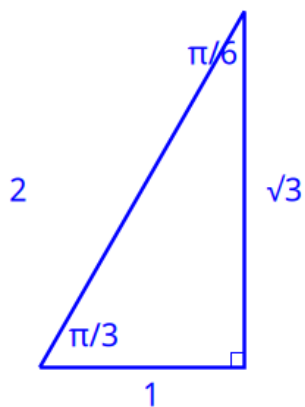
Double le nombre de solutions

Partie 2 : Résoudre des équations trigonométriques linéaires impliquant des

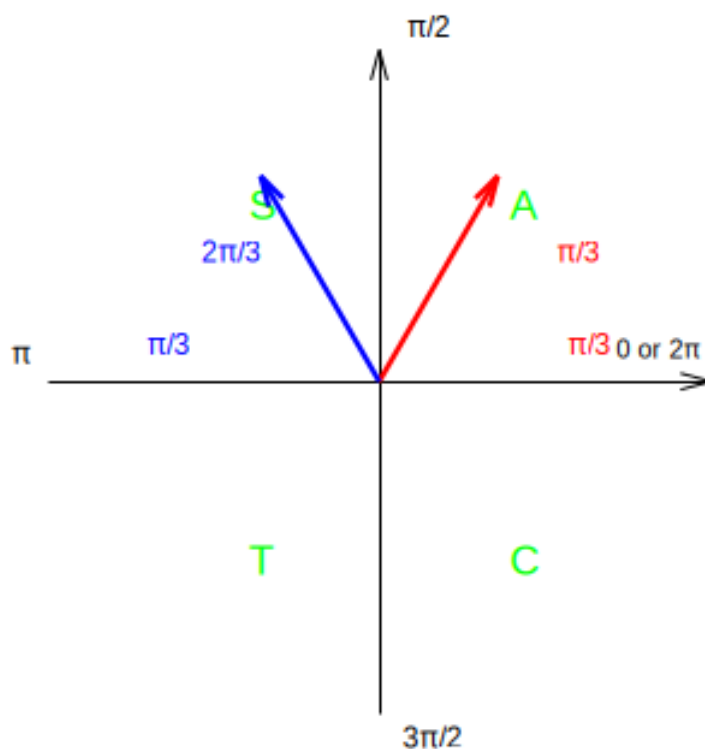
angles doubles

Exemple 1 : $\sin(2\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ où $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Soit $2\theta = x$. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$ Graphique? Non $\rightarrow$ Triangle? Oui



$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Placer l'angle de référence aux quadrants 1 et 2, où le sinus est positif.



$$x_1 = \frac{\pi}{3}$$

$$x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$2\theta = x \rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{3} \rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{6}, \text{ et } 2\theta = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{3}$$

$y = \sin(2\theta)$ a une période de π ; ajouter π à θ_1 et θ_2 pour trouver d'autres angles $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ayant des rapports équivalents.

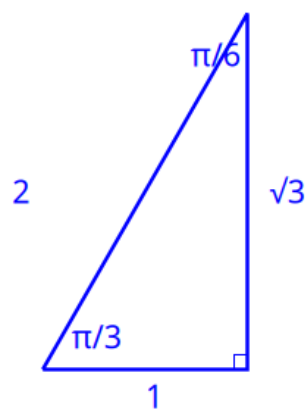
$$\theta_3 = \theta_1 + \pi = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$$

$$\theta_4 = \theta_2 + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

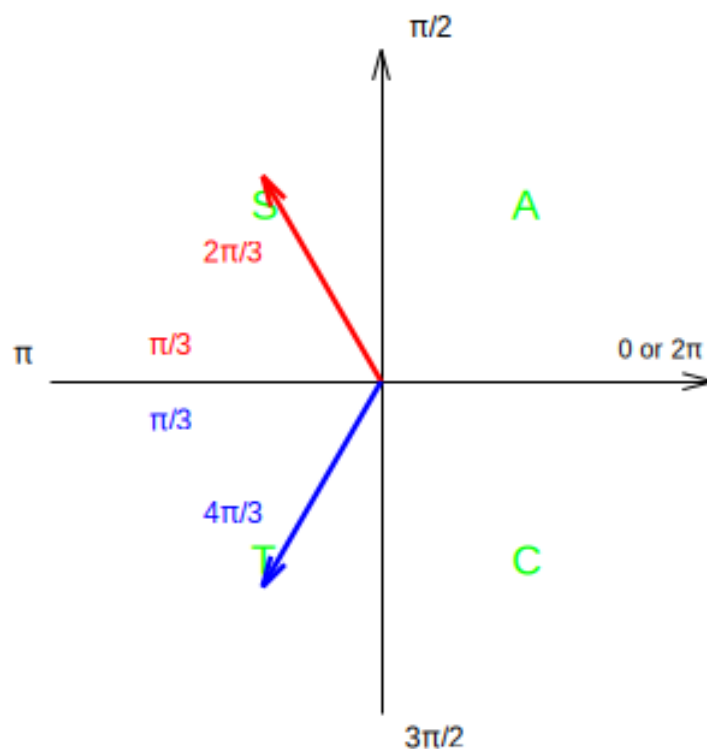
$$\sin\left[2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sin\left[2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \sin\left[2\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right] = \sin\left[2\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Exemple 2 : $\cos(2\theta) = -\frac{1}{2}$ où $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Soit $2\theta = x$. $\cos x = -\frac{1}{2} \rightarrow$ Graphique? Non $\rightarrow$ Triangle? Oui



$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Placer l'angle de référence aux quadrants 2 et 3, où le cosinus est négatif.



$$x_1 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$x_2 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$$

$$2\theta = x \rightarrow 2\theta = \frac{2\pi}{3} \rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{3}, \text{ et } 2\theta = \frac{4\pi}{3} \rightarrow \theta_2 = \frac{2\pi}{3}$$

Rappelons que $\cos(2\theta)$ a une période de π ; ajouter π à θ_1 et θ_2 pour trouver d'autres solutions $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

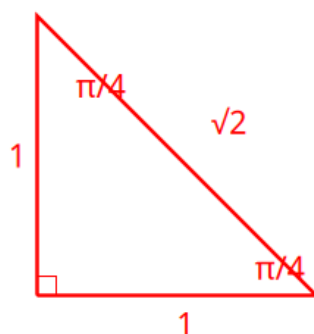
$$\theta_3 = \theta_1 + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$\theta_4 = \theta_2 + \pi = \frac{2\pi}{3} + \pi = \frac{5\pi}{3}$$

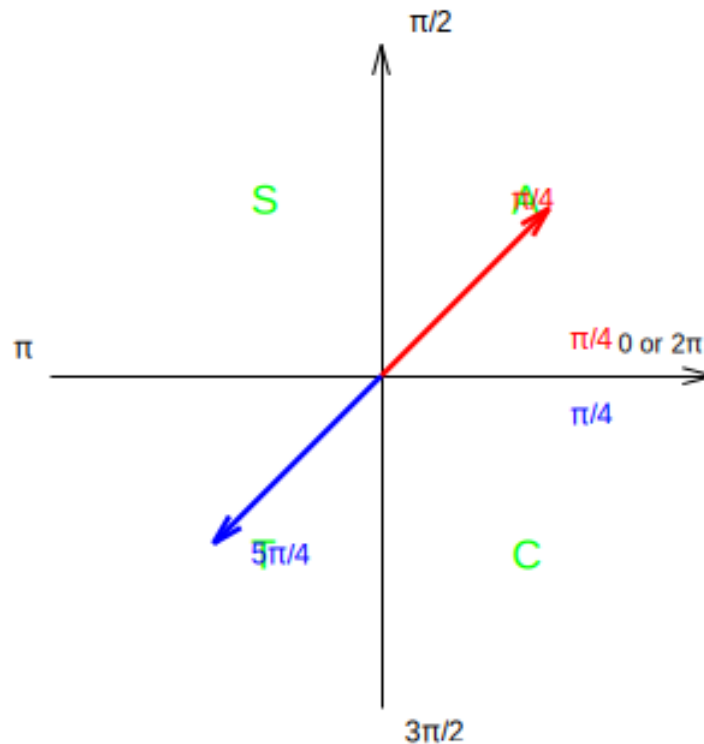
$$\cos\left[2\left(\frac{\pi}{3}\right)\right] = \cos\left[2\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = \cos\left[2\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right] = \cos\left[2\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right] = -\frac{1}{2}$$

Exemple 3 : $\tan(2\theta) = 1$ où $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Soit $2\theta = x$. $\tan x = 1 \rightarrow$ Graphique? Non $\rightarrow$ Triangle? Oui



$\tan \frac{\pi}{4} = 1$. Placer l'angle de référence aux quadrants 1 et 3, où la tangente est positive.



$$x_1 = \frac{\pi}{4}$$

$$x_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

$$2\theta = x \rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \theta_1 = \frac{\pi}{8}, \text{ et } 2\theta = \frac{5\pi}{4} \rightarrow \theta_2 = \frac{5\pi}{8}$$

Rappelons que $\tan(2\theta)$ a une période de $\frac{\pi}{2}$; ajouter $\frac{\pi}{2}$ à θ_1 et θ_2 pour trouver d'autres solutions $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

$$\theta_3 = \theta_2 + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{8} + \frac{4\pi}{8} = \frac{9\pi}{8}$$

$$\theta_4 = \theta_3 + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{8} + \frac{4\pi}{8} = \frac{13\pi}{8}$$

$$\tan \left[2 \left(\frac{\pi}{8} \right) \right] = \tan \left[2 \left(\frac{5\pi}{8} \right) \right] = \tan \left[2 \left(\frac{9\pi}{8} \right) \right] = \tan \left[2 \left(\frac{13\pi}{8} \right) \right] = 1$$